
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01214197 4











NEUE GRUNDLAGEN

EINER THEORIE

DER ALLGEMEINEN THETAFUNCTIONEN

VON

DR. A. KRAZER UND **DR. F. PRYM**

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT STRASSBURG.

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT WÜRZBURG.

KURZ ZUSAMMENGEFASST UND HERAUSGEGEBEN

VON

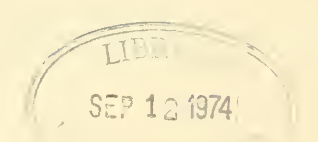
DR. A. KRAZER.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1892.



Vorwort.

Die vorliegende Arbeit enthält die Resultate jener Untersuchungen, welche mein hochverehrter Lehrer und ich während der Jahre 1883—1888 gemeinsam angestellt haben. Diese Untersuchungen lagen Ende 1888 soweit ausgearbeitet und zu einem geschlossenen Ganzen vereinigt vor, dass bei weiterer gemeinsamer Thätigkeit die Herausgabe derselben im Laufe der nächsten zwei Jahre hätte erfolgen können. Da wurden wir, die bis dahin täglich zu gemeinsamer Arbeit zusammengekommen waren, durch meine Berufung hierher getrennt und erkannten, nunmehr ausschliesslich auf schriftlichen Verkehr angewiesen, bald, dass unter so geänderten Verhältnissen bis zur Veröffentlichung unserer Untersuchungen in der von uns beabsichtigten ausführlichen Weise noch eine Reihe von Jahren erforderlich sein würde. Nun schien es uns aber aus mehrfachen Gründen wünschenswerth, die Resultate unserer Untersuchungen baldmöglichst in den Händen der Mathematiker zu sehen, und wir beschlossen daher, dass ich aus unseren Manuscripten einen Auszug veröffentlichen solle, der die von uns gewonnenen Resultate vollständig enthalten, zugleich aber auch einen genauen Einblick in die angewendeten Methoden gewähren würde. Indem ich diesen Auszug hiermit der Öffentlichkeit übergebe, will ich es nicht unterlassen, zur Orientirung des Lesers das Folgende hinzuzufügen.

Als Herr Prym im Jahre 1879 seine Untersuchungen über die allgemeinen Thetafunctionen mit p Variablen und rationalen Charakteristiken begann, waren nur wenige dahin gehörige Formeln bekannt. Diese Formeln bezogen sich fast ausschliesslich auf Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus halben Zahlen gebildet sind, und zu ihrer Ableitung wurde ausnahmslos der auf functionentheoretischen Betrachtungen beruhende Hermite'sche Satz in Verbindung mit der Methode der unbestimmten Coefficienten angewendet, ein Verfahren, das in den wenigsten Fällen die wahre Natur der mit seiner Hülfe erhaltenen Formeln erkennen lässt. Für seine ersten

Arbeiten *), die zu Anfang des Jahres 1882 abgeschlossen wurden, hatte nun Herr Prym sich die Aufgabe gestellt, die bis dahin bekannten Relationen zwischen Thetafunctionen mit denselben Parametern aus einer einzigen Formel, der von ihm mitgetheilten und bewiesenen Riemann'schen Thetaformel, auf directem Wege abzuleiten und neue Systeme specieller Formeln aufzustellen, zugleich aber auch eine allgemeinere, die Riemann'sche als speciellen Fall enthaltende Formel zu finden, die ein Eindringen in das Gebiet der Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus beliebigen rationalen Zahlen gebildet sind, ermöglichte. Die vorgesteckten Ziele wurden nun zwar erreicht, jedoch musste zur Ableitung der Hauptformel immer noch die Methode der unbestimmten Coefficienten verwendet werden.

Der entscheidende Fortschritt in der angegebenen Richtung wurde gemacht, als Herr Prym im Juli 1882 fand, dass man für die Riemann'sche Thetaformel ausser den beiden von ihm schon veröffentlichten Beweisen noch einen dritten von ganz anderen Gesichtspunkten ausgehenden Beweis geben könne. **) Das eingeschlagene Verfahren bestand darin, dass man in der die linke Seite der Formel bildenden $4p$-fach unendlichen Reihe neue Summationsbuchstaben vermittelst einer linearen, schon von Jacobi ***) zu ähnlichem Zwecke angewendeten Substitution einführte und hierauf die Summation von der ihr anhaftenden Beschränkung durch Einschiebung eines discontinuirlichen Factors befreite. Aus der linken Seite der Riemann'schen Thetaformel ging alsdann durch directe Umformung die rechte hervor. Damit war ein Princip gewonnen, das, in richtiger Weise verallgemeinert, von fundamentaler Bedeutung für die Theorie der Thetafunctionen zu werden versprach. In der That gelang es bald darauf Herrn Prym, mit Hülfe dieses Princips eine Thetaformel †) herzustellen, welche seine frühere Hauptformel an Allgemeinheit übertraf, und unsere nun beginnenden gemeinsamen Untersuchungen zeigten bald, dass man auf dem betretenen Wege noch weiter gelangen könne.

Der Gedanke, eine mehrfach unendliche Reihe, bei der jeder Summationsbuchstabe die ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, dadurch umzuformen, dass man an Stelle der Summationsbuchstaben vermittelst einer linearen Substitution neue einführt, findet sich schon in Arbeiten von Eisenstein ††); allein dort wird ausdrücklich die

*) Prym, Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie. Leipzig 1882. Teubner.

Prym, Kurze Ableitung der Riemann'schen Thetaformel. (Journal für r. u. a. Mathematik. Bd. 93, pag. 124)

**) Prym, Ein neuer Beweis für die Riemann'sche Thetaformel. (Acta mathematica, Bd. 3, pag. 201)

***) Jacobi, Theorie der elliptischen Functionen, aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet. (Gesammelte Werke, Bd. 1, pag. 503)

†) Prym, Ableitung einer allgemeinen Thetaformel. (Acta mathematica, Bd. 3, pag. 216)

††) Eisenstein, Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. VI. Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind. (Journal für r. u. a. Mathematik, Bd. 35, pag. 173, 190, 230)

Bedingung gesetzt, dass die Coefficienten der Substitution ganze Zahlen seien. Auch die von Herrn **Schröter** in seinen auf die Theorie der Modulargleichungen sich beziehenden Arbeiten *) angewendete Methode zur Ableitung von Thetaformeln beruht auf der Anwendung von linearen Substitutionen mit ganzen Zahlen als Coefficienten und ist wohl aus dem Grunde nicht weiter verfolgt worden, weil schon in einfachen Fällen die Bestimmung der Summation für die neu eingeführten Summationsbuchstaben bedeutende Schwierigkeiten verursacht. Der Gedanke dagegen, unendliche Reihen der angegebenen Art durch eine lineare Substitution, deren Coefficienten beliebige rationale Zahlen sind, umzuformen, ist zuerst von Herrn **Prym** ausgesprochen und durch Verbindung mit dem Gedanken der Einschiebung eines discontinuirlichen Factors fruchtbar gemacht worden.

In weiterer Verfolgung dieser Gedanken stellten wir uns beim Beginne unserer gemeinsamen Untersuchungen im Jahre 1883 zunächst die Aufgabe, ein Product von n Thetafunctionen mit verschiedenen Parametern in ähnlicher Weise umzuformen, wie es kurz zuvor für ein Product von n Thetafunctionen mit gleichen Parametern geschehen war. Zu dem Ende führten wir in die dem Producte der n Thetafunctionen entsprechende np-fach unendliche Reihe an Stelle der np Summationsbuchstaben $m_\mu^{(\nu)}, {}_{\mu=1,2,\dots,p}^{\nu=1,2,\dots,n}$, np neue Summationsbuchstaben $n_\mu^{(\nu)}, {}_{\mu=1,2,\dots,p}^{\nu=1,2,\dots,n}$, durch eine lineare Substitution, die in jeder ihrer Gleichungen nur Grössen m und n mit demselben unteren Index enthielt, ein und suchten alsdann die Coefficienten der Substitution als rationale Zahlen so zu bestimmen, dass nach Einschiebung eines passend gewählten discontinuirlichen Factors das vorgelegte Thetaproduct in eine Summe von Thetaproducten überging. Es zeigte sich, dass die gestellte Aufgabe identisch ist mit der Aufgabe, eine Summe von n quadratischen Formen mit je p Veränderlichen durch eine lineare Substitution der eben angegebenen Art mit rationalen Zahlen als Coefficienten in eine ebensolche Summe zu transformiren, und es wurde dadurch die Theorie der hierher gehörigen Thetaformeln auf eine rein arithmetische, im 2. Abschnitte des ersten Theiles entwickelte Grundlage gestellt. Alle diese Formeln sind in der im 3. Abschnitte aufgestellten Formel (Θ), die wir als die Fundamentalformel für die Theorie der Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken bezeichnen, als specielle Fälle enthalten. Die Gewinnung dieser Fundamentalformel gelang uns im Jahre 1884, und aus ihr leiteten wir dann zunächst die beiden im 4. und 5. Abschnitte mitgetheilten für die allgemeine Theorie der Thetafunctionen wichtigen speciellen Formeln ab.

Unsere nun beginnenden weiteren Untersuchungen bezweckten die Gewinnung charakteristischer Formeln für Thetafunctionen mit denselben Parametern, oder, da

---

*) **Schröter**, De aequationibus modularibus. Inaugural-Dissertation, Königsberg 1854.
Schröter, Über die Entwickelung der Potenzen der elliptischen Transcendenten ϑ und die Theilung dieser Functionen. Habilitationsschrift, Breslau 1855.

eine jede solche Formel zur Grundlage eine orthogonale Substitution mit rationalen Zahlen als Coefficienten hat, die Gewinnung charakteristischer orthogonaler Substitutionen der angegebenen Art. Ein wesentlicher Schritt in dieser Richtung war von mir schon im Jahre 1882 gemacht worden, als ich mich mit der Aufgabe beschäftigte, aus der von Herrn Prym kurz zuvor gewonnenen, schon oben erwähnten allgemeinen Formel eine specielle Formel abzuleiten, die für die Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, dasselbe leistet, wie die Riemann'sche Formel für die Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus halben Zahlen gebildet sind. Die zu diesem Zwecke damals von mir construirte, mit Dritteln ganzer Zahlen als Coefficienten gebildete und der in meiner Habilitationsschrift*) aufgestellten Thetaformel zu Grunde gelegte orthogonale Substitution liess sich nämlich infolge ihrer charakteristischen Bauart ohne Mühe verallgemeinern und führte so zu jener merkwürdigen mit r^{teln} ganzer Zahlen als Coefficienten gebildeten orthogonalen Substitution, welche der am Ende des 5. Abschnittes aufgestellten, schon früher von uns veröffentlichten Formel zu Grunde liegt. In Verfolgung des angegebenen Zieles stellten wir uns nun die Aufgabe, alle orthogonalen Substitutionen zu finden, deren Coefficienten halbe Zahlen sind, und gelangten bald auch zur vollständigen Lösung derselben. Unter den so erhaltenen Substitutionen zeichneten sich gewisse durch ihre reguläre Bauart aus, und von ihnen ausgehend erhielten wir dann, nachdem wir ihre wahre Natur erkannt hatten, durch Verallgemeinerung ähnlich gebaute orthogonale Substitutionen mit r^{teln} ganzer Zahlen als Coefficienten. Die so gewonnenen charakteristischen orthogonalen Substitutionen finden sich im 6. Abschnitte; die ihnen entsprechenden Thetaformeln dagegen werden im 7. Abschnitte aufgestellt und in Bezug auf ihren inneren Zusammenhang untersucht. Der 8. Abschnitt endlich enthält einige für die Anwendungen wichtige specielle Formeln.

Schon vor dem Abschlusse unserer auf die Theorie der Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken sich beziehenden Untersuchungen hatten wir uns, angeregt durch die Arbeiten der Herren Hermite**), Thomae***) und Weber†), im Laufe des Jahres 1883 wiederholt mit dem Probleme der Transformation der Thetafunctionen beschäftigt, jedoch

*) Krazer, Über Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. (Mathem. Annalen, Bd. 22, pag. 416)

**) Hermite, Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques. (Journal de Mathématiques pures et appliquées, Sér. II, t. III, pag. 26)

Hermite, Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes. (Comptes rendus, t. XL, pag. 249 u. flg.)

***) Thomae, Die allgemeine Transformation der Θ-Functionen mit beliebig vielen Variabeln. Inaugural-Dissertation, Göttingen 1864.

†) Weber, Über die unendlich vielen Formen der ϑ-Function. (Journal für r. u. a. Mathematik, Bd. 74, pag. 57)

Weber, Über die Transformationstheorie der Theta-Functionen, ins Besondere derer von drei Veränderlichen. (Annali di Matematica, Ser. II, t. IX, pag. 126)

dabei, der herrschenden Anschauung folgend, nur solche Transformationen in den Kreis unserer Betrachtungen gezogen, denen ganze Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ als Transformationszahlen entsprechen. Es war uns aber damals nicht gelungen, unsere Untersuchungen in dieser Richtung zu dem gewünschten Abschlusse zu bringen. Wir hatten uns nämlich die Aufgabe gestellt, die Transformation der Thetafunctionen auf demselben Wege, den wir für die Ableitung der auf Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken sich beziehenden Formeln mit Erfolg betreten hatten, also durch directe Umformung der Thetareihen durchzuführen und auf diese Weise auch die gesammte Transformationstheorie auf eine von der Methode der unbestimmten Coefficienten unabhängige Grundlage zu stellen; bei diesen Untersuchungen waren wir auf Schwierigkeiten gestossen, die uns zunächst unüberwindlich schienen. Da erkannte Herr Prym im Frühjahre 1885, dass man gewisse Thetaformeln als Transformationsformeln, denen gebrochene Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ als Transformationszahlen entsprechen, auffassen könne, und formulirte daraufhin das Problem der Transformation der Thetafunctionen in der im 1. Abschnitte des zweiten Theiles mitgetheilten allgemeinen Weise. Damit war der Bann gebrochen, der bis dahin auf der Transformationstheorie gelastet hatte, und nun konnten wir das Problem der Transformation in dem oben ausgesprochenen Sinne mit Erfolg in Angriff nehmen.

Zu jeder Transformation gehört eine bestimmte positive Zahl t, die eine ganze rationale Function der Transformationszahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ist und welche die Ordnungszahl der Transformation genannt wird. In der älteren Theorie, die nur ganze Zahlen als Transformationszahlen kennt, treten für t nur ganze positive Zahlen auf; in der vorliegenden Theorie dagegen kann t mit jeder rationalen positiven Zahl zusammenfallen. Eine Transformation, für die $t = 1$ ist, wird eine lineare Transformation genannt, da in diesem Falle die ursprüngliche Thetafunction mit den Argumenten u und den Parametern a, von einer einfachen Exponentialfunction abgesehen, sich stets linear durch Thetafunctionen mit den Argumenten v und den Parametern b ausdrückt. Der Schwerpunkt der neuen Theorie liegt in der linearen Transformation; mit den dahin gehörigen Problemen beschäftigten wir uns während der Jahre 1885—1887.

Zunächst leiteten wir durch directe Umformung der Thetareihe die drei im 2., 3. und 4. Abschnitte mitgetheilten Transformationsformeln I, II, III[2]), $0 < q < p$, ab. Die erste dieser Formeln wird dadurch erhalten, dass man in der Thetareihe an Stelle der p Summationsbuchstaben m durch eine lineare Substitution mit irgend welchen rationalen Zahlen als Coefficienten p neue Summationsbuchstaben n unter gleichzeitiger Einschiebung eines passend gewählten discontinuirlichen Factors einführt. Die zweite Formel, die wohl jedem, der sich mit der Transformationstheorie beschäftigt hat, bekannt ist, entsteht dadurch, dass man in der Thetareihe an Stelle der Parameter a neue Parameter b einführt, die sich von den ursprünglichen um ganze Vielfache von πi unterscheiden. Die dritte Formel endlich, die als die Verallgemeinerung einer zu-

erst von Jacobi*) für Thetafunctionen einer Variable aufgestellten fundamentalen Formel anzusehen ist, wird dadurch erhalten, dass man die p-fach unendliche Thetareihe durch Einschiebung eines gewissen den Werth 1 besitzenden Factors in eine $(p+q)$-fach unendliche Reihe verwandelt, bei dieser die Summationsordnung ändert und alsdann q der $p+q$ Summationen ausführt. Die directe Ableitung dieser dritten Formel gelang uns erst, nachdem Herr Prym die dem Falle $p=1$ entsprechende specielle Formel auf directem Wege gewonnen und einen strengen Beweis für die Zulässigkeit der erwähnten Änderung der Summationsordnung gefunden hatte. Die drei durch die Formeln I, II, $\text{III}^{(q)}$ dargestellten linearen Transformationen bezeichneten wir mit T_I, T_{II}, $T_{III(q)}$ und nannten sie elementare lineare Transformationen.

Die weitere Aufgabe bestand nun vor allem darin, nachzuweisen, dass man jede lineare Transformation T aus Transformationen vom Typus T_I, T_{II}, T_{III} zusammensetzen könne, dann aber auch darin, für jede solche Transformation T die einfachste Art der Zusammensetzung zu finden. Zu dem Ende betrachteten wir zunächst diejenigen, von uns „singuläre" genannten, linearen Transformationen, bei denen die Transformationszahlen $\mathfrak{b}$ sämmtlich der Null gleich sind, und fanden, dass jede solche singuläre Transformation S sich aus drei, oder in speciellen Fällen aus weniger als drei Transformationen vom Typus T_I, T_{II} zusammensetzen lässt. Nachdem dieser einfachste Fall erledigt war, beschäftigten wir uns mit der Zusammensetzung der allgemeinen linearen Transformation aus elementaren, und es gelang uns, auch in diesem Falle die gestellte Aufgabe vollständig zu lösen. Es ergab sich nämlich, dass man jede nicht singuläre lineare Transformation T auf mannigfache Weise aus zwei singulären linearen Transformationen S', S'' und einer für die Transformation T charakteristischen Transformation $T_{III(q)}$, der Gleichung $T = S'T_{III(q)}S''$ entsprechend, zusammensetzen kann, und es zeigte sich zugleich, dass die sämmtlichen linearen Transformationen in $p+1$ streng geschiedene, den Typen S, $S'T_{III(1)}S''$, $S'T_{III(2)}S''$, ..., $S'T_{III(p)}S''$ entsprechende Classen zerfallen, in dem Sinne, dass eine lineare Transformation nur einer dieser $p+1$ Classen angehören kann. Die Lösung der gestellten Aufgabe erforderte langwierige, mit zahlreichen Schwierigkeiten verknüpfte Untersuchungen. Die erhaltenen Resultate sind im 5. Abschnitte mitgetheilt.

Eine lineare Transformation kann man, wie schon vorher bemerkt wurde, auf mannigfache Weise aus elementaren Transformationen vom Typus T_I, T_{II}, T_{III} zusammensetzen, und es entspricht zugleich einer jeden solchen Zusammensetzung eine bestimmte Art der Zusammensetzung der zur Transformation T gehörigen Formel aus Formeln vom Typus I, II, III. Je einfacher aber die Zusammensetzung der Transformation T sich vollzieht, um so einfacher gestaltet sich auch die Zusammensetzung

*) Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Königsberg 1829, pag. 165, Formel 9. (Gesammelte Werke, Bd. 1, pag. 217, Formel 9) Man vergleiche auch die im Folgenden citirte Arbeit von Rosenhain, pag. 395—397.

der ihr entsprechenden Formel. Dieser Umstand war bei unseren soeben besprochenen Untersuchungen über die Zusammensetzung linearer Transformationen aus elementaren massgebend. Wir haben die verschiedensten Zusammensetzungen studirt und uns schliesslich für die im Texte mitgetheilten als die einfachsten entschieden. Die daraufhin erhaltenen allgemeinen Transformationsformeln erschienen aber zunächst nicht in conciser Form; dieselben enthielten vielmehr in den auf ihren rechten Seiten stehenden Summen Gruppen von Summanden, die zusammen die Summe Null hatten und die daher aus den Formeln ausgeschieden werden mussten, wenn diese in der einfachsten Gestalt erscheinen sollten. Erst nach mehrfachen Versuchen und nachdem ich insbesondere die bei der Zusammensetzung auftretenden Summen $G[\sigma]$, $H[\tau]$, die von ähnlicher Bauart sind, wie die sogenannten Gauss'schen Summen, einer eingehenden Untersuchung unterzogen hatte, gelang es mir, die Formeln von allen überflüssigen Summanden zu befreien und in die jetzt vorliegende endgültige Gestalt zu bringen. Der 6. Abschnitt enthält die so reducirten Formeln, vier an der Zahl; dieselben entsprechen den vier bei der linearen Transformation zum Zwecke der Formelbildung unterschiedenen Fällen. Die Zusammenfassung dieser vier Formeln in eine einzige Hauptformel und die Specialisirung dieser letzteren für den Fall ganzzahliger Transformationszahlen bilden den Abschluss der auf die linearen Transformationen sich beziehenden Untersuchungen.

Nachdem so das Problem der allgemeinen linearen Transformation der Thetafunctionen seine vollständige Erledigung gefunden hatte, konnte nun schliesslich auch das Problem der nicht linearen Transformation mit Erfolg behandelt und zu einem befriedigenden Abschlusse gebracht werden. Die allgemeine nicht lineare Transformation kann nämlich unmittelbar aus einer linearen Transformation von allgemeinem Charakter und zwei ganz speciellen nicht linearen Transformationen zusammengesetzt werden. Die der ersten dieser drei Transformationen entsprechende Formel ergiebt sich ohne Mühe aus der im 6. Abschnitte gewonnenen Hauptformel; die den beiden nicht linearen Transformationen entsprechenden speciellen Formeln dagegen sind schon im 4. Abschnitte des ersten Theiles abgeleitet worden, können aber auch, ohne Rücksicht auf die dort angestellten Untersuchungen, durch ein directes, wohl zuerst von Rosenhain *) angewendetes Verfahren erhalten werden. Diese drei Formeln, in passender Weise zusammengesetzt, lieferten die im 7. Abschnitte mitgetheilte Hauptformel für die nicht lineare Transformation und damit den Schlussstein für die ganze im zweiten Theile dieser Arbeit entwickelte Transformationstheorie.

Die vorstehenden Ausführungen werden den Leser über den Inhalt der vorliegenden Arbeit genügend orientirt haben. Es erübrigt nur noch, mit einigen Worten

*) Rosenhain, Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des fonctions ultra-elliptiques de la première classe. (Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institut national de France. Sciences math. et phys. t. XI, pag. 361)

auf die Bedeutung der entwickelten Theorie hinzuweisen. Da ist denn vor allem der einheitliche Charakter der angewendeten Methoden zu betonen; es liegt ihnen ausschliesslich das Princip der directen Umformung der Thetareihe zu Grunde. Nur durch consequentes Festhalten an diesem Principe konnte das vorgesteckte Ziel, die Theorie der Thetafunctionen auf naturgemässe Weise zu entwickeln, erreicht werden. Auf Grund der Untersuchungen des ersten Theiles stehen jetzt die Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus r^{teln} ganzer Zahlen gebildet sind, gleichberechtigt neben den bis jetzt fast ausschliesslich betrachteten Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus halben Zahlen gebildet sind. Die Untersuchungen des zweiten Theiles dagegen haben die Transformationstheorie von den bisher bestandenen Beschränkungen befreit und die endgültige Lösung der dahin gehörigen Grundprobleme gebracht. Im Übrigen glauben wir weniger auf die gewonnenen Resultate als auf den Umstand Gewicht legen zu sollen, dass unsere Untersuchungen der mathematischen Forschung ein neues, weites Arbeitsfeld eröffnen.

Von der Aufnahme, die dieser Auszug findet, wird es abhängen, ob wir später einmal unsere gesammten auf die Thetafunctionen sich beziehenden Arbeiten veröffentlichen.

Strassburg i. E., im Oktober 1891.

A. Krazer.

Inhalt.

Erster Theil.

Theorie der Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken.

Zweiter Theil.

Theorie der Transformation der Thetafunctionen.

Berichtigungen.

Seite 10, Z. 9 v. o. lese man „$\sum_{\mu} \sum_{\mu'} a_{\mu \mu'} x_{\mu} x_{\mu'}$“ statt „$\sum_{\mu} \sum_{\mu'} a_{\mu \mu'} x_{\mu} x_{\mu}$“,

Seite 13, Z. 6 v. u. lese man „$k^{(\varrho\sigma)} = \varepsilon^{(\sigma)} \frac{2\lambda^{(\varrho\sigma)}}{L q^{(\varrho)}}$“ statt „$k^{(\varrho\sigma)} = \varepsilon^{(\varrho)} \frac{2\lambda^{(\varrho\sigma)}}{L q^{(\varrho)}}$“,

Seite 17, Z. 10 v. u. lese man „$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} a_{\mu\mu'}^{(\varrho)} c_{\mu}^{(\varrho\sigma)} c_{\mu'}^{(\varrho\sigma')}$“ statt „$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} \alpha_{\mu\mu'}^{(\varrho)} c_{\mu}^{(\varrho\sigma)} c_{\mu'}^{(\varrho\sigma')}$“,

Seite 19 ist in der Formel (F_2) unter dem ersten Σ der Buchstabe α ausgefallen,

Seite 71, Z. 6 v. u. lese man „mit s', so geht“ statt „mit s, so geht“,

Seite 86, Z. 5 v. u. lese man „$\mathfrak{c}_{11} = \mathfrak{c}_{22} = \cdots = \mathfrak{c}_{qq}$“ statt „$\mathfrak{c}_{11} = \mathfrak{c}_{22} = \cdots = \mathfrak{c}_{pp}$“,

Seite 109, Z. 2 v. o. lese man „$(rs\overline{\Delta}_{\beta})^{2p}$“ statt „$(rs\overline{\Delta}_{p})^{2p}$“,

Seite 110, Z. 14 v. o. lese man „$=$“ statt „$\asymp$“,

Seite 123, Z. 4 v. u. lese mau „Abschnitte“ statt „Artikel“.

Erster Theil.

Theorie der Thetafunctionen

mit

rationalen Charakteristiken.



Erster Abschnitt.

Über die Convergenz der Thetareihe. — Einige Definitionen, Formeln und Sätze über Thetafunctionen.

1.

Unter einer p-fach unendlichen Thetareihe versteht man eine p-fach unendliche Reihe, bei welcher der Logarithmus des allgemeinen Gliedes eine ganze rationale Function zweiten Grades der p Summationsbuchstaben ist. Eine solche Reihe kann, wenn man die Summationsbuchstaben mit $m_1, m_2, \ldots, m_p$ bezeichnet, immer in die Form:

$$\sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} b_\mu m_\mu + c}$$

gebracht werden, bei der die $\frac{1}{2}p(p+1)$ Grössen $a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$, die p Grössen b_μ und die Grösse c von $m_1, m_2, \ldots, m_p$ unabhängig sind.

Die erste Frage ist die, welche Bedingungen die Grössen a, b, c erfüllen müssen, damit die aufgestellte Reihe absolut convergire. Bezeichnet man aber den reellen Theil von $a_{\mu\mu'}$ mit $r_{\mu\mu'}$, so ergibt sich sofort als nothwendige Bedingung für die absolute Convergenz der Thetareihe die, dass der Werth des Ausdruckes:

$$R = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} r_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'}$$

stets gegen $-\infty$ gehe, wenn irgend welche der p ganzen Zahlen m ihren absoluten Werthen nach über alle Grenzen wachsen, und es lässt sich weiter an der Hand der dann immer bestehenden Darstellung von R:

$$\begin{aligned} R = r_{11}^{(1)} & \left(m_1 + \frac{r_{12}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}} m_2 + \frac{r_{13}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}} m_3 + \cdots + \frac{r_{1p}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}} m_p \right)^2 \\ & + \frac{r_{22}^{(2)}}{r_{11}^{(1)}} \left(m_2 + \frac{r_{23}^{(2)}}{r_{22}^{(2)}} m_3 + \cdots + \frac{r_{2p}^{(2)}}{r_{22}^{(2)}} m_p \right)^2 \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{r_{pp}^{(p)}}{r_{p-1\,p-1}^{(p-1)}} (m_p)^2 \end{aligned}$$

zeigen, dass diese als nothwendig erkannte Bedingung für die absolute Convergenz der

Thetareihe auch hinreichend ist; in dieser Gleichung bezeichnet allgemein $r_{\varrho\sigma}^{(\nu)}$ die Determinante:

$$r_{\varrho\sigma}^{(\nu)} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1\nu-1} & r_{1\sigma} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2\nu-1} & r_{2\sigma} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{\nu-1 1} & r_{\nu-1 2} & \cdots & r_{\nu-1\,\nu-1} & r_{\nu-1\sigma} \\ r_{\varrho 1} & r_{\varrho 2} & \cdots & r_{\varrho\nu-1} & r_{\varrho\sigma} \end{vmatrix},$$

wobei ν, ϱ, σ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ bezeichnen, die auch theilweise oder sämmtlich einander gleich sein können, und der Fall $\nu = 1$ in der Weise aufzufassen ist, dass die Determinante $r_{\varrho\sigma}^{(\nu)}$ sich alsdann auf das einzige Element $r_{\varrho\sigma}$ reducirt.

Die angeschriebene Darstellung von R zeigt aber weiter, dass die für die Form R gefundene, zur absoluten Convergenz der p-fach unendlichen Thetareihe nothwendige und hinreichende Bedingung durch das System der p Bedingungen:

$$r_{11}^{(1)} < 0, \quad \frac{r_{22}^{(2)}}{r_{11}^{(1)}} < 0, \quad \frac{r_{33}^{(3)}}{r_{22}^{(2)}} < 0, \ldots, \frac{r_{pp}^{(p)}}{r_{p-1\,p-1}^{(p-1)}} < 0,$$

und dieses endlich durch die Bedingung, dass die quadratische Form R eine negative Form sei, ersetzt werden kann.

2.

Unter der Voraussetzung, dass für reelle x der reelle Theil der Form:

$$A = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} x_\mu x_{\mu'}$$

eine negative quadratische Form ist, kann die Form A, unter Anwendung einer der früheren analogen Bezeichnung, gemäss der Gleichung:

$$\begin{aligned} A = a_{11}^{(1)} & \left(x_1 + \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} x_2 + \frac{a_{13}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} x_3 + \cdots + \frac{a_{1p}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} x_p \right)^2 \\ & + \frac{a_{22}^{(2)}}{a_{11}^{(1)}} \left(x_2 + \frac{a_{23}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} x_3 + \cdots + \frac{a_{2p}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} x_p \right)^2 \\ & + \cdots\cdots \\ & + \frac{a_{pp}^{(p)}}{a_{p-1\,p-1}^{(p-1)}} (x_p)^2 \end{aligned}$$

als Summe von p Quadraten linearer Functionen der x dargestellt werden, und man erkennt zugleich, dass die reellen Theile der p Grössen:

$$a_{11}^{(1)}, \quad \frac{a_{22}^{(2)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad \frac{a_{33}^{(3)}}{a_{22}^{(2)}}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{pp}^{(p)}}{a_{p-1\,p-1}^{(p-1)}}$$

sämmtlich negative Werthe haben. Die Determinante $a_{pp}^{(p)}$ ist mit der Determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{pp}$ der quadratischen Form A identisch, und es folgt daher auch, dass diese Determinante stets einen von Null verschiedenen Werth besitzt.

3.

Man gehe jetzt auf die in Art. 1 aufgestellte allgemeine Thetareihe zurück, nehme an, dass die reellen Theile der in ihr vorkommenden Grössen a die angegebenen für die absolute Convergenz der Reihe nothwendigen und hinreichenden Bedingungen erfüllen, und betrachte die Grössen b als unabhängige complexe Veränderliche. Der Werth der Reihe soll als Function dieser Veränderlichen aufgefasst und, nachdem man noch statt des Buchstabens b den Buchstaben w gewählt, die Grösse c aber gleich Null gesetzt hat, mit $\vartheta(w_1 | w_2 | \dots | w_p)$ bezeichnet werden, sodass also:

$$\vartheta(w_1 | w_2 | \dots | w_p) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu w_\mu}$$

ist. Die Function $\vartheta(w_1 | w_2 | \dots | w_p)$ ist dann eine einwerthige und für alle endlichen w auch stetige Function der complexen Veränderlichen $w_1, w_2, \dots w_p$, welche den Gleichungen:

$$\begin{aligned} &(1_0) \qquad \vartheta(w_1 | \dots | w_\nu + \pi i | \dots | w_p) = \vartheta(w_1 | \dots | w_\nu | \dots | w_p), \\ &(2_0) \qquad \vartheta(w_1 + a_{1\nu} | \dots | w_p + a_{p\nu}) = \vartheta(w_1 | \dots | w_p)\, e^{-2w_\nu - a_{\nu\nu}} \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \dots, p)$$

genügt.

In die in Art. 1 aufgestellte p-fach unendliche Thetareihe führe man weiter an Stelle der Grössen $b_1, b_2, \dots, b_p$ die Grössen $w_1 + c_1, w_2 + c_2, \dots, w_p + c_p$ ein, indem man unter $w_1, w_2, \dots, w_p$ wieder unabhängige complexe Veränderliche, unter $c_1, c_2, \dots, c_p$ willkürliche complexe Constanten versteht. Bringt man dann, was immer und nur auf eine Weise möglich ist, dieses Constantensystem mit Hülfe reeller Grössen g, h in die Gestalt:

$$h_1 \pi i + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{1\mu} \,\Big|\, h_2 \pi i + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{2\mu} \,\Big|\, \dots \,\Big|\, h_p \pi i + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{p\mu},$$

und setzt gleichzeitig:

$$c = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g_\mu g_{\mu'} + 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu (w_\mu + h_\mu \pi i),$$

so entsteht die allgemeinere Function:

$$\begin{aligned} &\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p) \\ &= \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} (m_\mu + g_\mu)(m_{\mu'} + g_{\mu'}) + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} (m_\mu + g_\mu)(w_\mu + h_\mu \pi i)}, \end{aligned}$$

welche ihrer Entstehung gemäss mit der vorher gewonnenen einfacheren Function $\vartheta(w_1 | \dots | w_p)$ durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p) = \vartheta\Big(w_1 + h_1 \pi i + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{1\mu} \,\Big|\, \dots \,\Big|\, w_p + h_p \pi i + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{p\mu}\Big) \\ \times e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g_\mu g_{\mu'} + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu (w_\mu + h_\mu \pi i)} \end{aligned}$$

verknüpft ist und in dieselbe übergeht, wenn die Grössen g, h sämmtlich den Werth Null annehmen. Jede Function von der Form $\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p)$ soll eine Thetafunction genannt werden. Entsprechend den Gleichungen (1_0), (2_0) bestehen für sie die Gleichungen:

$$(1) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_\nu + \pi i | \dots | w_p) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_\nu | \dots | w_p)\, e^{2 g_\nu \pi i}, \qquad (\nu = 1, 2, \dots, p)$$

$$(2) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 + a_{1\nu} | \dots | w_p + a_{p\nu}) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p)\, e^{-2 w_\nu - a_{\nu\nu} - 2 h_\nu \pi i}.$$

Das Symbol $\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}$ möge die Charakteristik der Thetafunction heissen und, wenn kein Missverständniss zu befürchten ist, kürzer mit $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ bezeichnet werden. Die Charakteristik $\begin{bmatrix} g+g' \\ h+h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_1' \dots g_p + g_p' \\ h_1 + h_1' \dots h_p + h_p' \end{bmatrix}$ möge die Summe, die Charakteristik $\begin{bmatrix} g-g' \\ h-h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - g_1' \dots g_p - g_p' \\ h_1 - h_1' \dots h_p - h_p' \end{bmatrix}$ die Differenz der Charakteristiken $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}$ genannt werden. Eine Charakteristik, deren Elemente für $\nu = 1, 2, \dots, p$ den Bedingungen $0 \leq g_\nu < 1$, $0 \leq h_\nu < 1$ genügen, möge eine Normalcharakteristik genannt werden. Zwei Charakteristiken $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}$ sollen congruent genannt werden, wenn ihre entsprechenden Elemente sich nur um ganze Zahlen unterscheiden; im anderen Falle mögen sie incongruent heissen. Eine Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p)$, deren Charakteristik eine Normalcharakteristik ist, möge eine Normalfunction genannt werden. Zwei Functionen $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p)$ und $\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p)$ sollen nicht wesentlich verschieden genannt werden, wenn ihre Charakteristiken einander congruent sind; im anderen Falle mögen sie wesentlich verschieden heissen.

Die p Grössen $w_1, w_2, \dots, w_p$ sollen die Argumente, die $\frac{1}{2}p(p+1)$ Grössen $a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$ die Parameter der Thetafunction genannt werden. In den Fällen, wo die Ausdrücke für die Argumente einer Thetafunction sich nur durch untere Indices unterscheiden, möge es erlaubt sein, hinter dem Functionszeichen nur den allgemeinen Ausdruck für die Argumente mit Weglassung des Index in doppelte Klammern eingeschlossen zu schreiben, also $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(w)\!)$ statt $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p)$; im Anschlusse daran möge dann das Grössensystem $w_1 | \dots | w_p$ einfacher mit (w), ein System $w_1 + k_1 | \dots | w_p + k_p$ mit $(w+k)$, und endlich noch ein System von der Form:

$$w_1 + h_1 \pi i + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{1\mu} | \cdots | w_p + h_p \pi i + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{p\mu},$$

wenn es das Argumentensystem einer Thetafunction mit den Parametern a bildet, symbolisch mit $\left(w + \left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|\right)$ bezeichnet werden. Das Vorhandensein der Parameter a soll nur dann bei der Bezeichnung der Function und zwar in der Form $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(w)\!)_a$ zum Ausdruck gebracht werden, wenn gleichzeitig Functionen mit verschiedenen Parametersystemen betrachtet werden.

Es sollen noch einige Formeln aufgestellt werden, die im weiteren Verlaufe der Arbeit als Hülfsformeln wiederholt zur Anwendung kommen. Zu dem Ende mögen unter $g'_1, \ldots, g'_p, h'_1, \ldots, h'_p$ irgend welche reelle Constanten, unter $\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \psi_1, \ldots, \psi_p$ dagegen irgend welche ganze Zahlen verstanden werden; es bestehen dann die Formeln:

$$(A)\quad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(\!\!\left(w + \begin{vmatrix} g' \\ h' \end{vmatrix}\right)\!\!\right) = \vartheta\begin{bmatrix} g+g' \\ h+h' \end{bmatrix}(\!(w)\!)\, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g'_\mu g'_{\mu'} - 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu (w_\mu + h_\mu \pi i + h'_\mu \pi i)},$$

$$(B)\quad \vartheta\begin{bmatrix} g_1+\varphi_1 \cdots g_p+\varphi_p \\ h_1+\psi_1 \cdots h_p+\psi_p \end{bmatrix}(\!(w)\!) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{bmatrix}(\!(w)\!)\, e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \psi_\mu g_\mu \pi i},$$

$$(C)\quad \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{bmatrix}(\!(-w)\!) = \vartheta\begin{bmatrix} -g_1 \cdots -g_p \\ -h_1 \cdots -h_p \end{bmatrix}(\!(w)\!),$$

$$(D)\quad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(\!\!\left(w + \begin{vmatrix} \varphi \\ \psi \end{vmatrix}\right)\!\!\right) = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(w)\!)\, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \varphi_\mu \varphi_{\mu'} - 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \varphi_\mu w_\mu + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} (\psi_\mu g_\mu - \varphi_\mu h_\mu)\pi i}.$$

Die früher aufgestellten Gleichungen (1), (2) sind als specielle Fälle in der Formel (D) enthalten.

4.

Es sollen jetzt speciell Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken, d. h. solche, deren Charakteristiken nur rationale Zahlen als Elemente enthalten, betrachtet werden. Eine Thetafunction mit rationaler Charakteristik kann stets in die Form:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1}{r} \cdots \frac{\varepsilon_p}{r} \\ \frac{\varepsilon'_1}{r} \cdots \frac{\varepsilon'_p}{r} \end{bmatrix}(w_1 \mid \ldots \mid w_p)$$

gebracht werden, wobei r eine positive ganze Zahl, die $\varepsilon, \varepsilon'$ irgend welche ganze Zahlen bezeichnen. Diese Function soll eine zur Zahl r gehörige Thetafunction genannt, und von allen diesen Thetafunctionen soll gesagt werden, dass sie die zur Zahl r gehörige Gruppe von Thetafunctionen bilden; in dieser Gruppe kommen r^{2p} Normalfunctionen vor, und jede andere Function der Gruppe ist von einer dieser r^{2p} Normalfunctionen nicht wesentlich verschieden. Die Charakteristik $\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{r} \\ \frac{\varepsilon'}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1}{r} \cdots \frac{\varepsilon_p}{r} \\ \frac{\varepsilon'_1}{r} \cdots \frac{\varepsilon'_p}{r} \end{bmatrix}$ soll, wenn dadurch kein Missverständniss zu befürchten ist, zur Abkürzung mit $\left[\frac{\varepsilon}{r}\right]$ und entsprechend die zugehörige Thetafunction mit $\vartheta\left[\frac{\varepsilon}{r}\right](\!(w)\!)$ bezeichnet werden.

Die r^{2p} zur Zahl r gehörigen Normalfunctionen sind stets linear unabhängig, d. h. es kann zwischen ihnen, so lange die w den Charakter unabhängiger Veränderlichen haben, niemals eine Relation von der Form:

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \ldots \varepsilon'_p}}^{0, 1, \cdots, r-1} C^{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p}_{\varepsilon'_1 \cdots \varepsilon'_p}\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1}{r} \cdots \frac{\varepsilon_p}{r} \\ \frac{\varepsilon'_1}{r} \cdots \frac{\varepsilon'_p}{r} \end{bmatrix}(\!(w)\!) = 0$$

bestehen, bei der die r^{2p} Buchstaben $C^{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p}_{\varepsilon'_1 \cdots \varepsilon'_p}$ von $w_1, \ldots, w_p$ unabhängige Grössen bezeichnen, die nicht alle den Werth Null besitzen.

Der Quotient irgend zweier zur Zahl r gehörigen Thetafunctionen soll ein zur Zahl r gehöriger Thetaquotient genannt, und von allen diesen Quotienten soll gesagt werden, dass sie die zur Zahl r gehörige Gruppe von Thetaquotienten bilden. Ein jeder solcher zur Zahl r gehöriger Thetaquotient:

$$Q_r(w_1 | \cdots | w_p) = \frac{\vartheta\left[\frac{\varepsilon}{r}\right](w_1 | \cdots | w_p)}{\vartheta\left[\frac{\eta}{r}\right](w_1 | \cdots | w_p)}$$

genügt den Gleichungen:

$$\begin{aligned} Q_r(w_1 | \cdots | w_\nu + r\pi i | \cdots | w_p) &= Q_r(w_1 | \cdots | w_\nu | \cdots | w_p), \\ Q_r(w_1 + r a_{1\nu} | \cdots | w_p + r a_{p\nu}) &= Q_r(w_1 | \cdots | w_p) \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, p)$$

und ist also eine $2p$-fach periodische Function der complexen Veränderlichen $w_1 | w_2 | \ldots | w_p$, welche die $2p$ Grössensysteme:

$$\begin{array}{llll} r\pi i | 0 | \ldots | 0, & & r a_{11} | r a_{21} | \ldots | r a_{p1}, \\ 0 | r\pi i | \ldots | 0, & & r a_{12} | r a_{22} | \ldots | r a_{p2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 | 0 | \ldots | r\pi i, & & r a_{1p} | r a_{2p} | \ldots | r a_{pp} \end{array}$$

als Periodensysteme besitzt. Ist umgekehrt der aus irgend zwei Thetafunctionen gebildete Quotient $Q(w_1 | \ldots | w_p)$ eine $2p$-fach periodische Function der complexen Veränderlichen $w_1, \ldots, w_p$, welche die soeben angeschriebenen $2p$ Grössensysteme als Periodensysteme besitzt, so kann man die Function $Q(w_1 | \ldots | w_p)$ von einem constanten Factor abgesehen immer durch Einführung passend gewählter neuen Veränderlichen $\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_p$ in eine Function $Q_r(\overline{w}_1 | \ldots | \overline{w}_p)$ der vorher betrachteten Art verwandeln. Man erkennt daraus, dass die Bedingung der Periodicität, sobald man sie für den Quotienten irgend zweier Thetafunctionen stellt, mit Nothwendigkeit auf Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken führt, und weiter auch, dass die Eintheilung dieser letzteren Functionen in Gruppen, wie sie oben gemacht wurde, eine wohlberechtigte ist, da allen aus je zwei Thetafunctionen einer Gruppe gebildeten Quotienten die nämlichen, der betreffenden Gruppe eigenthümlichen $2p$ Periodensysteme zukommen. Die $r^{2p} - 1$ speciellen zur Zahl r gehörigen Thetaquotienten, welche entstehen, wenn man die von $\vartheta[0]((w))$ verschiedenen $r^{2p} - 1$ zur Zahl r gehörigen Normalfunctionen durch $\vartheta[0]((w))$ theilt, sollen die zur Zahl r gehörigen Normalquotienten genannt werden. Bei der Untersuchung der zur Zahl r gehörigen Thetafunctionen und Thetaquotienten wird man sich auf die Betrachtung der r^{2p} Normalfunctionen und $r^{2p} - 1$ Normalquotienten als Grundfunctionen beschränken.

Die in den weiteren Abschnitten dieses ersten Theiles durchzuführenden Untersuchungen beziehen sich ausschliesslich auf Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken. Der Zweck dieser Untersuchungen ist die Aufdeckung der zwischen den genannten Functionen bestehenden Beziehungen.

Zweiter Abschnitt.

Algebraische Untersuchungen.

1.

Die am Ende des vorigen Artikels erwähnten Beziehungen zwischen Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken gelangen durch Formeln zum Ausdrucke, die sämmtlich aus einer einzigen Fundamentalformel abgeleitet werden können. Um eine Grundlage für die Herstellung dieser Fundamentalformel zu gewinnen, empfiehlt es sich, zuvor die nachstehende algebraische Untersuchung anzustellen.

Gegeben seien die beiden quadratischen Formen:

$$A = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} (a_{\mu\mu'}^{(1)} x_\mu^{(1)} x_{\mu'}^{(1)} + a_{\mu\mu'}^{(2)} x_\mu^{(2)} x_{\mu'}^{(2)} + \cdots + a_{\mu\mu'}^{(n)} x_\mu^{(n)} x_{\mu'}^{(n)}),$$

$$B = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} (b_{\mu\mu'}^{(1)} y_\mu^{(1)} y_{\mu'}^{(1)} + b_{\mu\mu'}^{(2)} y_\mu^{(2)} y_{\mu'}^{(2)} + \cdots + b_{\mu\mu'}^{(n)} y_\mu^{(n)} y_{\mu'}^{(n)});$$

dabei seien die np Veränderlichen x ebenso wie die np Veränderlichen y von einander unabhängig, es seien ferner die Grössen $a_{\mu\mu'}^{(\varrho)} = a_{\mu'\mu}^{(\varrho)}$ sämmtlich von Null verschieden und ausserdem so beschaffen, dass für reelle x der reelle Theil der Form A eine negative quadratische Form ist, es seien dagegen die Grössen $b_{\mu\mu'}^{(\varrho)} = b_{\mu'\mu}^{(\varrho)}$ zunächst keinen Bedingungen unterworfen. Man stelle die Frage, welchen Bedingungen die Grössen a, b noch genügen müssen, damit die Form A in die Form B übergeführt werden könne durch eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante von der Form:

$$(S) \qquad \left.\begin{aligned} x_\mu^{(1)} &= r_\mu^{(11)} y_\mu^{(1)} + r_\mu^{(12)} y_\mu^{(2)} + \cdots + r_\mu^{(1n)} y_\mu^{(n)}, \\ x_\mu^{(2)} &= r_\mu^{(21)} y_\mu^{(1)} + r_\mu^{(22)} y_\mu^{(2)} + \cdots + r_\mu^{(2n)} y_\mu^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_\mu^{(n)} &= r_\mu^{(n1)} y_\mu^{(1)} + r_\mu^{(n2)} y_\mu^{(2)} + \cdots + r_\mu^{(nn)} y_\mu^{(n)}, \end{aligned}\right\} (S_\mu)$$
$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

deren Coefficienten r sämmtlich rationale Zahlen sind, und deren Systeme (S_1), (S_2), ..., (S_p) nicht zerfallen; dabei wird ein System (S_μ) ein zerfallendes genannt, wenn in Folge des Verschwindens gewisser seiner Coefficienten $r_\mu^{(\varrho\sigma)}$ m der n Grössen $y_\mu^{(1)}, y_\mu^{(2)}, \ldots, y_\mu^{(n)}$ nur

in m der n Gleichungen des Systems (S_μ) vorkommen, und zugleich diese m Gleichungen keine der $n-m$ übrigen Grössen y enthalten.

Als nothwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit dieser Uberführung findet man, dass die Coefficienten a, b der Formen A, B sich in die durch die Gleichungen:

$$a_{\mu\mu'}^{(\varrho)} = p^{(\varrho)} f_\mu^{(\varrho)} f_{\mu'}^{(\varrho)} a_{\mu\mu'}, \qquad b_{\mu\mu'}^{(\sigma)} = q^{(\sigma)} g_\mu^{(\sigma)} g_{\mu'}^{(\sigma)} a_{\mu\mu'} \qquad \begin{pmatrix} \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

bestimmte Gestalt bringen lassen, wobei die $a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$ Grössen bezeichnen, die sämmtlich von Null verschieden und ausserdem so beschaffen sind, dass für reelle x der reelle Theil der Form $\sum_\mu \sum_{\mu'} a_{\mu\mu'} x_\mu x_{\mu'}$ eine negative quadratische Form ist, wobei ferner die f, g von Null verschiedene, im Ubrigen aber keinen Bedingungen unterworfene rationale Zahlen sind, und wobei endlich die p, q positive rationale Zahlen von der Beschaffenheit bezeichnen, dass für die mit ihnen als Coefficienten gebildeten Formen:

$$P = p^{(1)} x^{(1)^2} + p^{(2)} x^{(2)^2} + \cdots + p^{(n)} x^{(n)^2},$$
$$Q = q^{(1)} y^{(1)^2} + q^{(2)} y^{(2)^2} + \cdots + q^{(n)} y^{(n)^2}$$

eine nicht zerfallende lineare Substitution von der Form:

$$(T) \qquad \begin{aligned} x^{(1)} &= t^{(11)} y^{(1)} + t^{(12)} y^{(2)} + \cdots + t^{(1n)} y^{(n)}, \\ x^{(2)} &= t^{(21)} y^{(1)} + t^{(22)} y^{(2)} + \cdots + t^{(2n)} y^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(n)} &= t^{(n1)} y^{(1)} + t^{(n2)} y^{(2)} + \cdots + t^{(nn)} y^{(n)}, \end{aligned}$$

deren Coefficienten sämmtlich rationale Zahlen sind, existirt, welche die Form P in die Form Q überführt.

Erfüllen die Coefficienten a, b die angegebenen Bedingungen, so entspricht zugleich jedem solchen Systeme von n^2 rationalen Zahlen t eine in ihren Coefficienten r durch die Gleichungen:

$$r_\mu^{(\varrho\sigma)} = \frac{g_\mu^{(\sigma)}}{f_\mu^{(\varrho)}} t^{(\varrho\sigma)} \qquad \begin{pmatrix} \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

bestimmte, in ihren partiellen Gleichungensystemen $(S_1), (S_2), \ldots, (S_p)$ nicht zerfallende Substitution (S) mit rationalen Zahlen als Coefficienten und nicht verschwindender Determinante, welche die Form A in die Form B überführt, und es umfasst die Gesammtheit der auf diese Weise construirbaren Substitutionen (S) alle überhaupt existirenden Substitutionen der angegebenen Art, welche die Form A in die Form B überführen.

Man wird hier noch bemerken, dass die in der angegebenen Weise gebildeten Substitutionen (S), insofern als ihre Coefficienten von den Grössen $a_{\mu\mu'}$ vollständig unabhängig sind, die Überführung der Form A in die Form B auch dann noch bewirken, wenn man bei den in A und B vorkommenden Grössen $a_{\mu\mu'}$ von den oben gestellten Bedingungen absieht.

2.

Auf Grund des im vorigen Artikel Gefundenen reducirt sich die Aufgabe, alle den gemachten Voraussetzungen entsprechenden Formenpaare A, B, welche so beschaffen sind, dass die Form A sich durch eine Substitution (S) von der angegebenen Art in die Form B überführen lässt, zu bestimmen und zugleich für jedes solche Formenpaar alle Substitutionen (S) der angeführten Art, welche diese Überführung bewirken, anzugeben, auf die einfachere, alle mit positiven rationalen Zahlen p, q als Coefficienten gebildeten Formenpaare P, Q, welche so beschaffen sind, dass die Form P sich durch eine nicht zerfallende lineare Substitution (T), deren Coefficienten t sämmtlich rationale Zahlen sind, in die Form Q überführen lässt, zu bestimmen und zugleich für jedes solche Formenpaar P, Q alle Substitutionen (T) der angeführten Art, welche diese Überführung bewirken, anzugeben. Diese Aufgabe soll jetzt behandelt werden. Dabei nehme man an, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit geschehen kann, dass die Form P eine willkürlich gewählte sei. Die vorher gestellte Aufgabe kommt dann darauf hinaus, zu der willkürlich gewählten Form P alle nicht zerfallenden Substitutionen T zu finden, welche die Form P in Formen Q überführen.

Man kann zunächst eine specielle Substitution:

$$(\mathrm{T})\quad \begin{array}{lcl}
x^{(1)} & = & p^{(2)}y^{(1)} + p^{(3)}y^{(2)} + p^{(4)}y^{(3)} + \cdots + p^{(n-1)}y^{(n-2)} + p^{(n)}y^{(n-1)} + y^{(n)}, \\
x^{(2)} & = & -s^{(1)}y^{(1)} + p^{(3)}y^{(2)} + p^{(4)}y^{(3)} + \cdots + p^{(n-1)}y^{(n-2)} + p^{(n)}y^{(n-1)} + y^{(n)}, \\
x^{(3)} & = & -s^{(2)}y^{(2)} + p^{(4)}y^{(3)} + \cdots + p^{(n-1)}y^{(n-2)} + p^{(n)}y^{(n-1)} + y^{(n)}, \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
x^{(n-1)} & = & -s^{(n-2)}y^{(n-2)} + p^{(n)}y^{(n-1)} + y^{(n)}, \\
x^{(n)} & = & -s^{(n-1)}y^{(n-1)} + y^{(n)},
\end{array}$$

wobei für $\nu = 1, 2, \ldots, n$:

$$p^{(1)} + p^{(2)} + \cdots + p^{(\nu)} = s^{(\nu)}$$

gesetzt ist, angeben, durch deren Anwendung die Form:

$$P = p^{(1)}x^{(1)^2} + p^{(2)}x^{(2)^2} + \cdots + p^{(n)}x^{(n)^2}$$

in eine Form Q, nämlich in die Form:

$$Q = s^{(1)}s^{(2)}p^{(2)}y^{(1)^2} + s^{(2)}s^{(3)}p^{(3)}y^{(2)^2} + \cdots + s^{(n-1)}s^{(n)}p^{(n)}y^{(n-1)^2} + s^{(n)}y^{(n)^2}$$

übergeht, und sodann aus dieser Substitution die allgemeinere:

$$(\bar{\mathrm{T}})\quad \begin{array}{lcl}
x^{(1)} & = & t^{(1)}t^{(2)}p^{(2)}y^{(1)} + t^{(1)}t^{(3)}p^{(3)}y^{(2)} + \cdots + t^{(1)}t^{(n)}p^{(n)}y^{(n-1)} + t^{(1)}y^{(n)}, \\
x^{(2)} & = & -\bar{s}^{(1)}y^{(1)} + t^{(2)}t^{(3)}p^{(3)}y^{(2)} + \cdots + t^{(2)}t^{(n)}p^{(n)}y^{(n-1)} + t^{(2)}y^{(n)}, \\
x^{(3)} & = & -\bar{s}^{(2)}y^{(2)} + \cdots + t^{(3)}t^{(n)}p^{(n)}y^{(n-1)} + t^{(3)}y^{(n)}, \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
x^{(n)} & = & -\bar{s}^{(n-1)}y^{(n-1)} + t^{(n)}y^{(n)}
\end{array}$$

ableiten, in der für $\nu = 1, 2, \ldots, n$:

$$p^{(1)}t^{(1)^2} + p^{(2)}t^{(2)^2} + \cdots + p^{(\nu)}t^{(\nu)^2} = \bar{s}^{(\nu)}$$

gesetzt ist, und durch welche die Form P in die Form:

$$Q = \bar{s}^{(1)}\bar{s}^{(2)}p^{(2)}y^{(1)^2} + \bar{s}^{(2)}\bar{s}^{(3)}p^{(3)}y^{(2)^2} + \cdots + \bar{s}^{(n-1)}\bar{s}^{(n)}p^{(n)}y^{(n-1)^2} + \bar{s}^{(n)}y^{(n)^2}$$

übergeführt wird. Bei dieser Substitution $(\overline{\mathrm{T}})$ sollen $t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(n)}$ von Null verschiedene rationale Zahlen bezeichnen; man wird aber bemerken, dass das Gleichungensystem $(\overline{\mathrm{T}})$ auch dann noch eine, wenn auch zerfallende, Substitution, welche die Form P in eine Form Q überführt, darstellt, wenn man die Grössen $t^{(2)}, t^{(3)}, \ldots, t^{(n)}$ theilweise oder auch insgesammt der Null gleich setzt, für $t^{(1)}$ dagegen die gemachte Voraussetzung aufrecht hält. Setzt man dagegen $t^{(1)} = 0$, oder, um sogleich den allgemeinsten Fall einzuschliessen, $t^{(1)} = t^{(2)} = \ldots = t^{(\nu)} = 0$, während $t^{(\nu+1)}$ von Null verschieden sein soll, so verliert das Gleichungensystem $(\overline{\mathrm{T}})$ seinen ursprünglichen Charakter, da in diesem Falle die ersten ν Gleichungen desselben in $x^{(1)} = 0$, $x^{(2)} = 0$, $\ldots$, $x^{(\nu)} = 0$ übergehen. Entfernt man aber dann diese ν Gleichungen aus dem Gleichungensysteme $(\overline{\mathrm{T}})$ und setzt an ihre Stelle die Gleichungen $x^{(1)} = y^{(1)}$, $x^{(2)} = y^{(2)}$ $\ldots$, $x^{(\nu)} = y^{(\nu)}$, so stellen diese zusammen mit den $n - \nu$ noch übrigen Gleichungen des in der angegebenen Weise specialisirten Systems $(\overline{\mathrm{T}})$ eine zerfallende Substitution $(\overline{\mathrm{T}}_0)$ dar, welche die Form P in eine Form Q überführt, und welche im Folgenden als der den Werthen $t^{(1)} = t^{(2)} = \ldots = t^{(\nu)} = 0$, $t^{(\nu+1)} \neq 0$ entsprechende specielle Fall der Substitution $(\overline{\mathrm{T}})$ angesehen werden soll.

Die gewonnene Substitution $(\overline{\mathrm{T}})$, die im Folgenden, insofern sie zur Zahl n gehört, mit $(\overline{\mathrm{T}}^{(n)})$ bezeichnet werden soll, ist von besonderer Wichtigkeit. Man kann nämlich eine jede Substitution $(T^{(n)})$, welche die Form P in eine Form Q überführt, in der Form $(T^{(n)}) = (\overline{\mathrm{T}}^{(n)})\,(T'^{(n)})$ zusammensetzen aus einer in ihren Parametern t passend bestimmten Substitution $(\overline{\mathrm{T}}^{(n)})$ und einer Substitution $(T'^{(n)})$, welche aus der Gleichung $x^{(n)} = y^{(n)}$ und einem die Grösse $y^{(n)}$ nicht mehr enthaltenden Systeme von $n - 1$ Gleichungen besteht, das, für sich betrachtet, eine zur Zahl $n - 1$ gehörige Substitution $(T^{(n-1)})$ bildet. Ist dies geschehen, so kann man in derselben Weise die Substitution $(T^{(n-1)})$ in der Form $(T^{(n-1)}) = (\overline{\mathrm{T}}^{(n-1)})\,(T'^{(n-1)})$ zusammensetzen aus einer in ihren Parametern passend bestimmten Substitution $(\overline{\mathrm{T}}^{(n-1)})$ und einer Substitution $(T'^{(n-1)})$, welche aus der Gleichung $x^{(n-1)} = y^{(n-1)}$ und einem die Grösse $y^{(n-1)}$ nicht mehr enthaltenden Systeme von $n - 2$ Gleichungen besteht, das, für sich betrachtet, eine zur Zahl $n - 2$ gehörige Substitution $(T^{(n-2)})$ bildet. Fährt man so fort, so ergiebt sich schliesslich, dass jede Substitution $(T^{(n)})$, welche die Form P in eine Form Q überführt, mag dieselbe eine zerfallende oder eine nicht zerfallende sein, sich aus n Substitutionen von der Gestalt $(\overline{\mathrm{T}}^{(n)}), (\overline{\mathrm{T}}^{(n-1)}), \ldots, (\overline{\mathrm{T}}^{(2)}), (\overline{\mathrm{T}}^{(1)})$ beziehlich, unter Hinzunahme identischer Substitutionen, zusammensetzen lässt. Beachtet man dann noch, dass man auch umgekehrt immer wieder eine zur Zahl n gehörige Substitution (T), welche die Form P in eine Form Q überführt, erhält, wenn man in derselben Weise, wie es soeben zur Erzeugung einer gegebenen Substitution $(T^{(n)})$ geschehen ist, n Substitutionen von der Gestalt $(\overline{\mathrm{T}}^{(n)}), (\overline{\mathrm{T}}^{(n-1)}), \ldots, (\overline{\mathrm{T}}^{(2)}), (\overline{\mathrm{T}}^{(1)})$ beziehlich, unter Hinzu-

nahme identischer Substitutionen, zusammensetzt, so ergibt sich schliesslich, dass man alle Substitutionen (T), welche die Form P in Formen Q überführen, erhält, wenn man bei der soeben definirten Substitution $(T^{(n)})$ die in den n erzeugenden Substitutionen $(\overline{\mathrm{T}})$ im allgemeinen Falle vorkommenden $\frac{1}{2}n(n+1)$ Parameter sich im Gebiete der rationalen Zahlen frei bewegen lässt, jedoch so, dass niemals die in derselben erzeugenden Substitution vorkommenden Parameter gleichzeitig den Werth Null annehmen. Damit kann aber die Aufgabe, alle Substitutionen (T), welche die Form P in Formen Q überführen, und daher auch die früher gestellte speciellere, alle nicht zerfallenden derartigen Substitutionen (T) anzugeben, als gelöst betrachtet werden.

3.

In diesem Artikel soll noch gezeigt werden, wie man alle Substitutionen (T), welche eine gegebene Form P in eine gleichfalls gegebene Form Q überführen, erhalten kann, sobald eine Substitution (T) bekannt ist, welche diese Überführung bewirkt. Bei der Lösung dieser Aufgabe erkennt man sofort, dass man, sobald eine Substitution $(T) = (T')$, welche die Form P in die Form Q überführt, bekannt ist, alle überhaupt existirenden Substitutionen (T), welche diese Überführung bewirken, aus der Gleichung $(T) = (T')\,(K)$ erhält, wenn man darin an Stelle der Substitution (K) der Reihe nach eine jede der überhaupt existirenden mit rationalen Zahlen als Coefficienten gebildeten Substitutionen, welche die Form Q in sich überführen, treten lässt, und hat damit die gestellte Aufgabe auf die einfachere zurückgeführt, alle mit rationalen Zahlen k als Coefficienten gebildeten Substitutionen (K) zu bestimmen, welche die Form Q in sich überführen. Die Lösung dieser Aufgabe soll jetzt zum Schlusse für eine beliebig gewählte Form Q angegeben werden.

Versteht man unter $l^{(\mu\nu)}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$ irgend n^2 rationale Zahlen, für welche die Gleichungen:

$$l^{(\varrho\varrho)} = \frac{1}{q^{(\varrho)}}, \qquad l^{(\varrho\sigma)} + l^{(\sigma\varrho)} = 0 \qquad \left(\begin{smallmatrix}\varrho,\,\sigma = 1,\,2,\,\ldots,\,n\\ \varrho \gtrless \sigma\end{smallmatrix}\right)$$

bestehen, und deren Determinante L in Folge dessen einen von Null verschiedenen Werth besitzt, und setzt alsdann, indem man die Adjuncte von $l^{(\varrho\sigma)}$ in der Determinante L mit $\lambda^{(\varrho\sigma)}$ bezeichnet und unter $\varepsilon^{(1)}\,\varepsilon^{(2)}\ldots\varepsilon^{(n)}$ eine beliebige aus den Zahlen $+1$, -1 als Elementen gebildete Variation versteht:

$$k^{(\varrho\varrho)} = \varepsilon^{(\varrho)}\frac{2\lambda^{(\varrho\varrho)} - Lq^{(\varrho)}}{Lq^{(\varrho)}}, \qquad k^{(\varrho\sigma)} = \varepsilon^{(\varrho)}\frac{2\lambda^{(\varrho\sigma)}}{L\,q^{(\varrho)}}, \qquad \left(\begin{smallmatrix}\varrho,\,\sigma = 1,\,2,\,\ldots,\,n\\ \varrho \gtrless \sigma\end{smallmatrix}\right)$$

so führt die mit diesen rationalen Zahlen k als Coefficienten gebildete Substitution:

$$(K)\qquad \begin{aligned} x^{(1)} &= k^{(11)}\,y^{(1)} + k^{(12)}\,y^{(2)} + \cdots + k^{(1n)}\,y^{(n)},\\ x^{(2)} &= k^{(21)}\,y^{(1)} + k^{(22)}\,y^{(2)} + \cdots + k^{(2n)}\,y^{(n)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x^{(n)} &= k^{(n1)}\,y^{(1)} + k^{(n2)}\,y^{(2)} + \cdots + k^{(nn)}\,y^{(n)}\end{aligned}$$

stets die Form:

$$Q_x = q^{(1)} x^{(1)^2} + q^{(2)} x^{(2)^2} + \cdots + q^{(n)} x^{(n)^2}$$

in die Form:

$$Q_y = q^{(1)} y^{(1)^2} + q^{(2)} y^{(2)^2} + \cdots + q^{(n)} y^{(n)^2}$$

über, und es wird zugleich durch die Gleichungen (K) unter den über die Grössen l, ε gemachten Voraussetzungen die allgemeinste derartige Substitution dargestellt.

In der Substitution (K) ist als specieller Fall die Substitution:

$$(\mathrm{K}) \qquad \begin{aligned} x^{(1)} &= \varepsilon \frac{2q^{(1)} - s}{s} y^{(1)} + \varepsilon \frac{2q^{(2)}}{s} y^{(2)} + \cdots + \varepsilon \frac{2q^{(n)}}{s} y^{(n)}, \\ x^{(2)} &= \varepsilon \frac{2q^{(1)}}{s} y^{(1)} + \varepsilon \frac{2q^{(2)} - s}{s} y^{(2)} + \cdots + \varepsilon \frac{2q^{(n)}}{s} y^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(n)} &= \varepsilon \frac{2q^{(1)}}{s} y^{(1)} + \varepsilon \frac{2q^{(2)}}{s} y^{(2)} + \cdots + \varepsilon \frac{2q^{(n)} - s}{s} y^{(n)}, \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon = \pm 1$, und:

$$q^{(1)} + q^{(2)} + \cdots + q^{(n)} = s$$

gesetzt ist, enthalten, die man als die einfachste nicht zerfallende Substitution (K), welche die Form Q_x in die Form Q_y überführt, ansehen kann, und aus der man sofort die allgemeinere derartige Substitution:

$$(\overline{\mathrm{K}}) \qquad \begin{aligned} x^{(1)} &= \varepsilon \frac{2t^{(1)^2} q^{(1)} - \bar{s}}{\bar{s}} y^{(1)} + \varepsilon \frac{2t^{(1)} t^{(2)} q^{(2)}}{\bar{s}} y^{(2)} + \cdots + \varepsilon \frac{2t^{(1)} t^{(n)} q^{(n)}}{\bar{s}} y^{(n)}, \\ x^{(2)} &= \varepsilon \frac{2t^{(2)} t^{(1)} q^{(1)}}{\bar{s}} y^{(1)} + \varepsilon \frac{2t^{(2)^2} q^{(2)} - \bar{s}}{\bar{s}} y^{(2)} + \cdots + \varepsilon \frac{2t^{(2)} t^{(n)} q^{(n)}}{\bar{s}} y^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(n)} &= \varepsilon \frac{2t^{(n)} t^{(1)} q^{(1)}}{\bar{s}} y^{(1)} + \varepsilon \frac{2t^{(n)} t^{(2)} q^{(2)}}{\bar{s}} y^{(2)} + \cdots + \varepsilon \frac{2t^{(n)^2} q^{(n)} - \bar{s}}{\bar{s}} y^{(n)}, \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon = \pm 1$, und:

$$q^{(1)} t^{(1)^2} + q^{(2)} t^{(2)^2} + \cdots + q^{(n)} t^{(n)^2} = \bar{s}$$

gesetzt ist, ableiten kann. Bei dieser Substitution bezeichnen $t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(n)}$ zunächst von Null verschiedene rationale Zahlen. Da aber die Substitution $(\overline{\mathrm{K}})$ auch dann noch eine, wenn auch zerfallende, Substitution, welche die Form Q_x in die Form Q_y überführt, darstellt, wenn man die Grössen t theilweise der Null gleichsetzt, so soll für das Folgende die Bedingung, dass die t sämmtlich von Null verschieden seien, fallen gelassen werden.

Die gewonnene Substitution $(\overline{\mathrm{K}})$, die im Folgenden, insofern sie zur Zahl n gehört, mit $(\overline{\mathrm{K}}^{(n)})$ bezeichnet werden soll, ist für die Substitutionen (K) von derselben Bedeutung, wie die im vorigen Artikel aufgestellte Substitution $(\overline{\mathrm{T}})$ für die dort behandelten Substitutionen (T). Es kann nämlich gezeigt werden, dass jede Substitution $(K^{(n)})$, welche die Form Q_x in die Form Q_y überführt, sich aus n Substitutionen von

der Gestalt $(\bar{K}^{(n)})$, $(K^{(n-1)})$, ..., $(K^{(2)})$, $(K^{(1)})$ beziehlich, unter Hinzunahme identischer Substitutionen, zusammensetzen lässt, und daraus folgt weiter, dass man, da auch umgekehrt immer wieder eine zur Zahl n gehörige Substitution (K), welche die Form Q_x in die Form Q_y überführt, entsteht, wenn man n Substitutionen $(K^{(n)})$, $(\bar{K}^{(n-1)})$, ..., $(\bar{K}^{(2)})$, $(\bar{K}^{(1)})$ in dieser Weise zusammensetzt, alle Substitutionen (K), welche die Form Q_x in die Form Q_y überführen, erhält, wenn man die in den n erzeugenden Substitutionen $(\bar{K})$ vorkommenden $\frac{1}{2}\,n(n+1)$ Parameter sich im Gebiete der rationalen Zahlen frei bewegen lässt, jedoch so, dass niemals die in derselben erzeugenden Substitution vorkommenden Parameter gleichzeitig den Werth Null annehmen, und zugleich einer jeden der n in den n erzeugenden Substitutionen vorkommenden zweiten Einheitswurzeln unabhängig von den übrigen sowohl den Werth $+1$ als auch den Werth -1 annehmen lässt.

Dritter Abschnitt.

Aufstellung der Fundamentalformel des ersten Theiles.

1.

Gegeben seien zwei quadratische Formen:

$$A = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \left(a_{\mu\mu'}^{(1)} x_\mu^{(1)} x_{\mu'}^{(1)} + a_{\mu\mu'}^{(2)} x_\mu^{(2)} x_{\mu'}^{(2)} + \cdots + a_{\mu\mu'}^{(n)} x_\mu^{(n)} x_{\mu'}^{(n)}\right),$$

$$B = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \left(b_{\mu\mu'}^{(1)} y_\mu^{(1)} y_{\mu'}^{(1)} + b_{\mu\mu'}^{(2)} y_\mu^{(2)} y_{\mu'}^{(2)} + \cdots + b_{\mu\mu'}^{(n)} y_\mu^{(n)} y_{\mu'}^{(n)}\right),$$

die in ihren Coefficienten a, b so beschaffen sind, dass der reelle Theil einer jeden von ihnen eine negative quadratische Form ist, und dass zu ihnen eine Substitution (S) der früher angegebenen Art existirt, welche die Form A in die Form B überführt. Weiteren Bedingungen sollen die Formen A, B nicht unterworfen sein, und es soll auch von der im vorigen Abschnitte eingeführten Beschränkung, dass die die Substitution (S) bildenden partiellen Gleichungensysteme (S_1), (S_2), ..., (S_p) nicht zerfallen, hier abgesehen werden. In diesem Artikel soll gezeigt werden, dass jeder Substitution (S) eine charakteristische Thetaformel entspricht, und es soll zugleich die alle diese Formeln umfassende Fundamentalformel aufgestellt werden.

Zu dem Ende ordne man einer jeden der n quadratischen Formen:

$$A^{(1)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}^{(1)} x_\mu^{(1)} x_{\mu'}^{(1)}, \quad A^{(2)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}^{(2)} x_\mu^{(2)} x_{\mu'}^{(2)}, \; \ldots, \; A^{(n)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}^{(n)} x_\mu^{(n)} x_{\mu'}^{(n)}$$

eine Thetafunction, welche die Coefficienten der betreffenden Form als Parameter enthält, zu, also für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ der Form $A^{(\nu)}$ die Function:

$$\vartheta(\!(u^{(\nu)})\!)_{a^{(\nu)}} = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}^{(\nu)} m_\mu^{(\nu)} m_{\mu'}^{(\nu)} + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu^{(1)} u_\mu^{(\nu)}},$$

indem man dabei unter $u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}, \ldots, u_p^{(\nu)}$ beliebige complexe Veränderliche versteht, und bilde das Product der n Functionen $\vartheta(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}}$, $\vartheta(\!(u^{(2)})\!)_{a^{(2)}}$, ..., $\vartheta(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}}$; man erhält dann die Gleichung:

$$(F) \qquad \vartheta((u^{(1)}))_{a^{(1)}}\,\vartheta((u^{(2)}))_{a^{(2)}} \ldots \vartheta((u^{(n)}))_{a^{(n)}}$$

$$= \sum_{[m_1]}^{-\infty \ldots +\infty} \cdots \sum_{[m_p]}^{-\infty \ldots +\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}\left(a^{(1)}_{\mu\mu'} m^{(1)}_\mu m^{(1)}_{\mu'} + \cdots + a^{(n)}_{\mu\mu'} m^{(n)}_\mu m^{(n)}_{\mu'}\right) + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(m^{(1)}_\mu u^{(1)}_\mu + \cdots + m^{(n)}_\mu u^{(n)}_\mu\right)},$$

bei der für $\mu = 1, 2, \ldots, p$ das System der n Summationsbuchstaben $m^{(1)}_\mu, m^{(2)}_\mu, \ldots, m^{(n)}_\mu$ abgekürzt mit $[m_\mu]$ bezeichnet ist, und das dem bestimmten Index μ entsprechende Zeichen $\sum\limits_{[m_\mu]}^{-\infty, \ldots, +\infty}$ andeuten soll, dass nach jedem der n Summationsbuchstaben $m^{(1)}_\mu, m^{(2)}_\mu, \ldots, m^{(n)}_\mu$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu summiren ist.

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende np-fach unendliche Reihe soll jetzt dadurch umgeformt werden*), dass man an Stelle der Summationsbuchstaben m neue Summationsbuchstaben n einführt mit Hülfe der Substitution:

$$(S) \qquad \left.\begin{aligned} r_\mu m^{(1)}_\mu &= c^{(11)}_\mu n^{(1)}_\mu + c^{(12)}_\mu n^{(2)}_\mu + \cdots + c^{(1n)}_\mu n^{(n)}_\mu, \\ r_\mu m^{(2)}_\mu &= c^{(21)}_\mu n^{(1)}_\mu + c^{(22)}_\mu n^{(2)}_\mu + \cdots + c^{(2n)}_\mu n^{(n)}_\mu, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_\mu m^{(n)}_\mu &= c^{(n1)}_\mu n^{(1)}_\mu + c^{(n2)}_\mu n^{(2)}_\mu + \cdots + c^{(nn)}_\mu n^{(n)}_\mu, \end{aligned}\right\} (S_\mu)$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

welche aus der früher aufgestellten, die Form A in die Form B überführenden Substitution (S) abgeleitet wird, nachdem man deren Coefficienten $r^{(\varrho\sigma)}_\mu$ entsprechend den Gleichungen:

$$r^{(\varrho\sigma)}_\mu = \frac{c^{(\varrho\sigma)}_\mu}{r_\mu}, \qquad \begin{pmatrix} \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

wobei $c^{(\varrho\sigma)}_\mu$ eine ganze, r_μ eine positive ganze Zahl bezeichnet, als Quotienten ganzer Zahlen dargestellt hat, und bei welcher daher die Zahlen c, r den Bedingungen:

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} \alpha^{(\varrho)}_{\mu\mu'} c^{(\varrho\sigma)}_\mu c^{(\varrho\sigma')}_{\mu'} = \begin{cases} r_\mu r_{\mu'} b^{(\sigma)}_{\mu\mu'}, & \text{wenn } \sigma' = \sigma, \\ 0, & \text{wenn } \sigma' \gtrless \sigma, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \sigma, \sigma' = 1, 2, \ldots, n \\ \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

genügen.

Bezeichnet man die Determinante $\Sigma \pm c^{(11)}_\mu c^{(22)}_\mu \ldots c^{(nn)}_\mu$ der n^2 Coefficienten des Systems (S_μ) mit Δ_μ und die Adjuncte von $c^{(\varrho\sigma)}_\mu$ in dieser Determinante mit $d^{(\varrho\sigma)}_\mu$, so folgt aus den Gleichungen (S) durch Auflösung:

$$(S') \qquad \left.\begin{aligned} \Delta_\mu n^{(1)}_\mu &= r_\mu \left(d^{(11)}_\mu m^{(1)}_\mu + d^{(21)}_\mu m^{(2)}_\mu + \cdots + d^{(n1)}_\mu m^{(n)}_\mu\right), \\ \Delta_\mu n^{(2)}_\mu &= r_\mu \left(d^{(12)}_\mu m^{(1)}_\mu + d^{(22)}_\mu m^{(2)}_\mu + \cdots + d^{(n2)}_\mu m^{(n)}_\mu\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_\mu n^{(n)}_\mu &= r_\mu \left(d^{(1n)}_\mu m^{(1)}_\mu + d^{(2n)}_\mu m^{(2)}_\mu + \cdots + d^{(nn)}_\mu m^{(n)}_\mu\right), \end{aligned}\right\} (S'_\mu)$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p.$$

*) Man vergl. hiezu die Abhandlung: Prym, Ableitung einer allgemeinen Thetaformel (Acta mathematica, Bd. 3, pag. 216), in welcher die nachstehende Untersuchung für einen speciellen Fall vollständig ausgeführt ist.

Durch Anwendung der Substitution (S) geht aus der Gleichung (F) die Gleichung:

(F_1)
$$\vartheta(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}}\vartheta(\!(u^{(2)})\!)_{a^{(2)}}\ldots\vartheta(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}}$$
$$=\sum_{[n_1]}\cdots\sum_{[n_p]} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}\left(b_{\mu\mu'}^{(1)}n_\mu^{(1)}n_{\mu'}^{(1)}+\cdots+b_{\mu\mu'}^{(n)}n_\mu^{(n)}n_{\mu'}^{(n)}\right)+2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(n_\mu^{(1)}v_\mu^{(1)}+\cdots+n_\mu^{(n)}v_\mu^{(n)}\right)}$$

hervor, wenn man die Grössen v durch die Gleichungen:

$$r_\mu v_\mu^{(1)}=c_\mu^{(11)}u_\mu^{(1)}+c_\mu^{(21)}u_\mu^{(2)}+\cdots+c_\mu^{(n1)}u_\mu^{(n)},$$
$$r_\mu v_\mu^{(2)}=c_\mu^{(12)}u_\mu^{(1)}+c_\mu^{(22)}u_\mu^{(2)}+\cdots+c_\mu^{(n2)}u_\mu^{(n)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_\mu v_\mu^{(n)}=c_\mu^{(1n)}u_\mu^{(1)}+c_\mu^{(2n)}u_\mu^{(2)}+\cdots+c_\mu^{(nn)}u_\mu^{(n)},$$
$$\mu=1,2,\ldots,p,$$

definirt; und es ist dabei für $\mu=1,2,\ldots,p$ die auf der rechten Seite vorkommende, durch das Zeichen $\sum\limits_{[n_\mu]}$ angedeutete Summation nach $n_\mu^{(1)}, n_\mu^{(2)}, \ldots, n_\mu^{(n)}$ in der Weise auszuführen, dass man an Stelle des Systems der n Summationsbuchstaben $n_\mu^{(1)}, n_\mu^{(2)}, \ldots, n_\mu^{(n)}$ ein jedes der Werthesysteme treten lässt, welche sich dafür aus den Gleichungen (S'_μ) ergeben, wenn man eine jede der n Grössen $m_\mu^{(1)}, m_\mu^{(2)}, \ldots, m_\mu^{(n)}$ unabhängig von den übrigen alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt. Man erkennt aber leicht, dass man diese Summation auch so ausführen kann, dass man die n Grössen $n_\mu^{(1)}, n_\mu^{(2)}, \ldots, n_\mu^{(n)}$ durch die Grössen:

$$\hat{n}_\mu^{(1)}+\frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(1)}}{\varDelta_\mu},\quad \hat{n}_\mu^{(2)}+\frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(2)}}{\varDelta_\mu},\ \ldots,\ \hat{n}_\mu^{(n)}+\frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(n)}}{\varDelta_\mu},$$

in denen zur Abkürzung:

$$\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(1)}=r_\mu\left(d_\mu^{(11)}\alpha_\mu^{(1)}+d_\mu^{(21)}\alpha_\mu^{(2)}+\cdots+d_\mu^{(n1)}\alpha_\mu^{(n)}\right),$$
$$\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(2)}=r_\mu\left(d_\mu^{(12)}\alpha_\mu^{(1)}+d_\mu^{(22)}\alpha_\mu^{(2)}+\cdots+d_\mu^{(n2)}\alpha_\mu^{(n)}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(n)}=r_\mu\left(d_\mu^{(1n)}\alpha_\mu^{(1)}+d_\mu^{(2n)}\alpha_\mu^{(2)}+\cdots+d_\mu^{(nn)}\alpha_\mu^{(n)}\right)$$

gesetzt ist, beziehlich ersetzt, sodann für $\hat{n}_\mu^{(1)}, \hat{n}_\mu^{(2)}, \ldots, \hat{n}_\mu^{(n)}$ ein jedes System von n ganzen Zahlen, für welches die Zahlen:

$$c_\mu^{(11)}\hat{n}_\mu^{(1)}+\cdots+c_\mu^{(1n)}\hat{n}_\mu^{(n)},\quad c_\mu^{(21)}\hat{n}_\mu^{(1)}+\cdots+c_\mu^{(2n)}\hat{n}_\mu^{(n)},\quad\ldots,\quad c_\mu^{(n1)}\hat{n}_\mu^{(1)}+\cdots+c_\mu^{(n2)}\hat{n}_\mu^{(n)}$$

ganze Vielfache von r_μ sind, und jedesmal für $\alpha_\mu^{(1)}\alpha_\mu^{(2)}\ldots\alpha_\mu^{(n)}$ eine jede der $\overline{\varDelta}_\mu^n$ Variationen der Elemente $0, 1, 2, \ldots, \overline{\varDelta}_\mu-1$ zur n^{ten} Classe mit Wiederholung einführt, endlich die dann entstandene Summe durch die Anzahl s_μ der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$
(D_\mu)\qquad
\begin{aligned}
&r_\mu\left(d_\mu^{(11)}x_\mu^{(1)}+d_\mu^{(21)}x_\mu^{(2)}+\cdots+d_\mu^{(n1)}x_\mu^{(n)}\right)\equiv 0\pmod{\varDelta_\mu},\\
&r_\mu\left(d_\mu^{(12)}x_\mu^{(1)}+d_\mu^{(22)}x_\mu^{(2)}+\cdots+d_\mu^{(n2)}x_\mu^{(n)}\right)\equiv 0\pmod{\varDelta_\mu},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&r_\mu\left(d_\mu^{(1n)}x_\mu^{(1)}+d_\mu^{(2n)}x_\mu^{(2)}+\cdots+d_\mu^{(nn)}x_\mu^{(n)}\right)\equiv 0\pmod{\varDelta_\mu}
\end{aligned}
$$

theilt; dabei ist, wie im Folgenden, allgemein mit $\overline{M}$ der absolute Werth der Zahl M bezeichnet, und es sind bei einem auf die ganze Zahl M als Modul sich beziehenden Systeme linearer Congruenzen Normallösungen diejenigen genannt, welche ausschliesslich von Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, \overline{M}-1$ gebildet sind. Führt man dieses Verfahren der Reihe nach für $\mu = 1, 2, \ldots, p$ durch und multiplicirt hierauf linke und rechte Seite der entstandenen Gleichung mit $s_1 s_2 \ldots s_p$, so geht aus der Gleichung (F_1) die neue Gleichung:

$$
(F_2)\qquad s_1 s_2 \ldots s_p\, \vartheta\left(\!\left(u^{(1)}\right)\!\right)_{a^{(1)}} \vartheta\left(\!\left(u^{(2)}\right)\!\right)_{a^{(2)}} \ldots \vartheta\left(\!\left(u^{(n)}\right)\!\right)_{a^{(n)}}
$$

$$
=\sum\sum_{n}\left\{
\begin{aligned}
&e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}\left[b_{\mu\mu'}^{(1)}\left(\hat{n}_\mu^{(1)}+\frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(1)}}{\varDelta_\mu}\right)\left(\hat{n}_{\mu'}^{(1)}+\frac{\bar{\bar{\alpha}}_{\mu'}^{(1)}}{\varDelta_{\mu'}}\right)+\cdots+b_{\mu\mu'}^{(n)}\left(\hat{n}_\mu^{(n)}+\frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(n)}}{\varDelta_\mu}\right)\left(\hat{n}_{\mu'}^{(n)}+\frac{\bar{\bar{\alpha}}_{\mu'}^{(n)}}{\varDelta_{\mu'}}\right)\right]}\\
&\times e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left[\left(\hat{n}_\mu^{(1)}+\frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(1)}}{\varDelta_\mu}\right)v_\mu^{(1)}+\cdots+\left(\hat{n}_\mu^{(n)}+\frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(n)}}{\varDelta_\mu}\right)v_\mu^{(n)}\right]}
\end{aligned}
\right\}
$$

hervor, bei der die Summation in der soeben angegebenen Weise zu geschehen hat.

Die hierbei nach den $\hat{n}$ auszuführende Summation kann von der ihr anhaftenden Beschränkung befreit werden, indem man den Ausdruck:

$$
F=\frac{1}{r_1^n r_2^n \ldots r_p^n}\sum_{\beta} e^{2\pi i\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\frac{1}{r_\mu}\left[\left(\hat{n}_\mu^{(1)}+\frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(1)}}{\varDelta_\mu}\right)\bar{\beta}_\mu^{(1)}+\cdots+\left(\hat{n}_\mu^{(n)}+\frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(n)}}{\varDelta_\mu}\right)\bar{\beta}_\mu^{(n)}\right]},
$$

bei dem zur Abkürzung für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$
\begin{aligned}
\bar{\beta}_\mu^{(1)} &= c_\mu^{(11)}\beta_\mu^{(1)} + c_\mu^{(21)}\beta_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(n1)}\beta_\mu^{(n)},\\
\bar{\beta}_\mu^{(2)} &= c_\mu^{(12)}\beta_\mu^{(1)} + c_\mu^{(22)}\beta_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(n2)}\beta_\mu^{(n)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\bar{\beta}_\mu^{(n)} &= c_\mu^{(1n)}\beta_\mu^{(1)} + c_\mu^{(2n)}\beta_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(nn)}\beta_\mu^{(n)}
\end{aligned}
$$

gesetzt ist, und das Zeichen $\sum\limits_{\beta}$ andeutet, dass für $\substack{\nu=1,2,\ldots,n\\ \mu=1,2,\ldots,p}$ nach $\beta_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis $r_\mu - 1$ zu summiren ist, hinter $\sum\limits_{\hat{n}}$ als Factor einschiebt. Da nämlich der Ausdruck F immer den Werth Null besitzt, wenn an Stelle der $\hat{n}$ solche ganze Zahlen gesetzt werden, für welche die np Grössen:

$$
\frac{1}{r_\mu}\left(c_\mu^{(11)}\hat{n}_\mu^{(1)}+\cdots+c_\mu^{(1n)}\hat{n}_\mu^{(n)}\right),\ \frac{1}{r_\mu}\left(c_\mu^{(21)}\hat{n}_\mu^{(1)}+\cdots+c_\mu^{(2n)}\hat{n}_\mu^{(n)}\right),\cdots,\ \frac{1}{r_\mu}\left(c_\mu^{(n1)}\hat{n}_\mu^{(1)}+\cdots+c_\mu^{(nn)}\hat{n}_\mu^{(n)}\right),
$$

$$
\mu = 1, 2, \cdots, p,
$$

nicht sämmtlich ganze Zahlen sind, dagegen den Werth Eins, wenn die soeben angeschriebenen np Grössen sämmtlich ganze Zahlen sind, so erleidet durch Einschiebung des Factors F der Werth der Summe keine Änderung, aber man kann alsdann das Zeichen $\sum\limits_{\hat{n}}$ durch das Zeichen $\sum\limits_{\hat{n}}^{-\infty,\ldots,+\infty}$ ersetzen, das andeutet, dass nach jeder der np Grössen $\hat{n}$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu summiren ist. Multiplicirt man dann noch linke und rechte Seite der so entstandenen Gleichung mit $r_1^n r_2^n \ldots r_p^n$, so erhält man aus der Gleichung (F_2) die Gleichung:

$$(F_3) \qquad r_1^n r_2^n \ldots r_p^n s_1 s_2 \ldots s_p \, \vartheta(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}} \vartheta(\!(u^{(2)})\!)_{a^{(2)}} \ldots \vartheta(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}}$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\hat{n}}^{-\infty,\ldots,+\infty} \left\{ e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} \left[b_{\mu\mu'}^{(1)} \left(\hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(1)}}{\varDelta_\mu}\right) \left(\hat{n}_{\mu'}^{(1)} + \frac{\bar{\bar{\alpha}}_{\mu'}^{(1)}}{\varDelta_{\mu'}}\right) + \cdots + b_{\mu\mu'}^{(n)} \left(\hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(n)}}{\varDelta_\mu}\right) \left(\hat{n}_{\mu'}^{(n)} + \frac{\bar{\bar{\alpha}}_{\mu'}^{(n)}}{\varDelta_{\mu'}}\right) \right]} \times e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \left[\left(\hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(1)}}{\varDelta_\mu}\right) \left(v_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\beta}_\mu^{(1)}}{r_\mu} \pi i\right) + \cdots + \left(\hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(n)}}{\varDelta_\mu}\right) \left(v_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\beta}_\mu^{(n)}}{r_\mu} \pi i\right) \right]} \right\}.$$

Die Gleichung (F_3) geht aber unmittelbar in die zu Anfang dieses Artikels erwähnte Fundamentalformel über, wenn man die auf ihrer rechten Seite hinter den ersten beiden Summenzeichen stehende np-fach unendliche Reihe durch das mit ihr identische Product der n Thetafunctionen

$$\vartheta \begin{bmatrix} \frac{\bar{\bar{\alpha}}^{(\nu)}}{\varDelta} \\ \frac{\bar{\beta}^{(\nu)}}{r} \end{bmatrix} (\!(v^{(\nu)})\!)_{b^{(\nu)}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ersetzt, und man erhält so die

Fundamentalformel für die Theorie der Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken

in der Gestalt:

$$(\Theta) \qquad r_1^n r_2^n \ldots r_p^n s_1 s_2 \ldots s_p \, \vartheta(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}} \vartheta(\!(u^{(2)})\!)_{a^{(2)}} \ldots \vartheta(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}}$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\bar{\bar{\alpha}}^{(1)}}{\varDelta} \\ \frac{\bar{\beta}^{(1)}}{r} \end{bmatrix} (\!(v^{(1)})\!)_{b^{(1)}} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\bar{\bar{\alpha}}^{(2)}}{\varDelta} \\ \frac{\bar{\beta}^{(2)}}{r} \end{bmatrix} (\!(v^{(2)})\!)_{b^{(2)}} \ldots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\bar{\bar{\alpha}}^{(n)}}{\varDelta} \\ \frac{\bar{\beta}^{(n)}}{r} \end{bmatrix} (\!(v^{(n)})\!)_{b^{(n)}}.$$

Bei dieser Formel sind die Grössen u und v mit einander verknüpft durch die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} r_\mu v_\mu^{(1)} = c_\mu^{(11)} u_\mu^{(1)} + c_\mu^{(21)} u_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(n1)} u_\mu^{(n)}, & \varDelta_\mu u_\mu^{(1)} = r_\mu \left(d_\mu^{(11)} v_\mu^{(1)} + d_\mu^{(12)} v_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(1n)} v_\mu^{(n)}\right), \\ r_\mu v_\mu^{(2)} = c_\mu^{(12)} u_\mu^{(1)} + c_\mu^{(22)} u_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(n2)} u_\mu^{(n)}, & \varDelta_\mu u_\mu^{(2)} = r_\mu \left(d_\mu^{(21)} v_\mu^{(1)} + d_\mu^{(22)} v_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(2n)} v_\mu^{(n)}\right), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ r_\mu v_\mu^{(n)} = c_\mu^{(1n)} u_\mu^{(1)} + c_\mu^{(2n)} u_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(nn)} u_\mu^{(n)}, & \varDelta_\mu u_\mu^{(n)} = r_\mu \left(d_\mu^{(n1)} v_\mu^{(1)} + d_\mu^{(n2)} v_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(nn)} v_\mu^{(n)}\right), \end{array}$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p;$$

die $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ sind lineare Formen der α, β definirt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_\mu^{(1)} &= r_\mu \left(d_\mu^{(11)}\alpha_\mu^{(1)} + d_\mu^{(21)}\alpha_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(n1)}\alpha_\mu^{(n)}\right), & \bar{\beta}_\mu^{(1)} &= c_\mu^{(11)}\beta_\mu^{(1)} + c_\mu^{(21)}\beta_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(n1)}\beta_\mu^{(n)},\\
\bar{\alpha}_\mu^{(2)} &= r_\mu \left(d_\mu^{(12)}\alpha_\mu^{(1)} + d_\mu^{(22)}\alpha_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(n2)}\alpha_\mu^{(n)}\right), & \bar{\beta}_\mu^{(2)} &= c_\mu^{(12)}\beta_\mu^{(1)} + c_\mu^{(22)}\beta_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(n2)}\beta_\mu^{(n)},\\
&\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\\
\bar{\alpha}_\mu^{(n)} &= r_\mu \left(d_\mu^{(1n)}\alpha_\mu^{(1)} + d_\mu^{(2n)}\alpha_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(nn)}\alpha_\mu^{(n)}\right), & \bar{\beta}_\mu^{(n)} &= c_\mu^{(1n)}\beta_\mu^{(1)} + c_\mu^{(2n)}\beta_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(nn)}\beta_\mu^{(n)},
\end{aligned}$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

und es deutet das Zeichen $\sum\limits_\alpha$ an, dass für ${}^{\nu=1,2,\ldots,n}_{\mu=1,2,\ldots,p}$ nach $\alpha_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis $\Delta_\mu - 1$, das Zeichen $\sum\limits_\beta$, dass für ${}^{\nu=1,2,\ldots,n}_{\mu=1,2,\ldots,p}$ nach $\beta_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis $r_\mu - 1$ zu summiren ist; die mit $s_1, s_2, \ldots, s_p$ bezeichneten ganzen Zahlen endlich sind, da allgemein s_μ die Anzahl der Normallösungen des oben angeschriebenen Congruenzensystems (D_μ) bezeichnet und daher von den Werthen der Grössen r_μ, $c_\mu^{(\varrho\sigma)}(\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$ abhängt, in jedem speciellen Falle besonders zu bestimmen.

2.

Aus der Formel (Θ) erhält man durch passende Änderung der in ihr vorkommenden Variablen u, v die allgemeinere:

$$(\Theta')\qquad \begin{aligned}
& r_1^n \cdots r_p^n\, s_1 \cdots s_p\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\gamma^{(1)}+\varrho^{(1)}}{r} + \varkappa^{(1)} \\ \frac{\delta^{(1)}+\sigma^{(1)}}{\Delta} + \lambda^{(1)} \end{bmatrix}\!\left(\!\left(u^{(1)}\right)\!\right)_{a^{(1)}} \cdots\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\gamma^{(n)}+\varrho^{(n)}}{r} + \varkappa^{(n)} \\ \frac{\delta^{(n)}+\sigma^{(n)}}{\Delta} + \lambda^{(n)} \end{bmatrix}\!\left(\!\left(u^{(n)}\right)\!\right)_{a^{(n)}} e^{\varphi} \\
&= \sum_\alpha \sum_\beta \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(1)}+\bar{\varkappa}^{(1)}}{\Delta} + \varrho^{(1)} \\ \frac{\bar{\beta}^{(1)}+\bar{\lambda}^{(1)}}{r} + \sigma^{(1)} \end{bmatrix}\!\left(\!\left(v^{(1)}\right)\!\right)_{b^{(1)}} \cdots\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(n)}+\bar{\varkappa}^{(n)}}{\Delta} + \varrho^{(n)} \\ \frac{\bar{\beta}^{(n)}+\bar{\lambda}^{(n)}}{r} + \sigma^{(n)} \end{bmatrix}\!\left(\!\left(v^{(n)}\right)\!\right)_{b^{(n)}} e^{\psi} \\
&\qquad \times e^{2\pi i \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \left(\frac{\bar{\alpha}_\mu^{(\nu)}}{\Delta_\mu}\delta_\mu^{(\nu)} - \frac{\beta_\mu^{(\nu)}}{r_\mu}\gamma_\mu^{(\nu)}\right)},
\end{aligned}$$

wobei:

$$\varphi = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \left(\frac{\varrho_\mu^{(\nu)}}{r_\mu} + \varkappa_\mu^{(\nu)}\right) \frac{\delta_\mu^{(\nu)}}{\Delta_\mu}, \qquad \psi = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \left(\frac{\bar{\varkappa}_\mu^{(\nu)}}{\Delta_\mu} + \varrho_\mu^{(\nu)}\right) \frac{\beta_\mu^{(\nu)}}{r_\mu}.$$

In dieser Formel bezeichnen $\varkappa_\mu^{(\nu)}, \lambda_\mu^{(\nu)}, \varrho_\mu^{(\nu)}, \sigma_\mu^{(\nu)} \left({}^{\nu=1,2,\ldots,n}_{\mu=1,2,\ldots,p}\right)$ $4np$ beliebige reelle Grössen, $\gamma_\mu^{(\nu)}, \delta_\mu^{(\nu)} \left({}^{\nu=1,2,\ldots,n}_{\mu=1,2,\ldots,p}\right)$ irgend $2np$ ganze Zahlen; unter $\bar{\varkappa}_\mu^{(\nu)}, \bar{\lambda}_\mu^{(\nu)} \left({}^{\nu=1,2,\ldots,n}_{\mu=1,2,\ldots,p}\right)$ sind Grössen verstanden, die sich aus den $\varkappa$, λ in derselben Weise zusammensetzen, wie die Grössen $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ aus den α, β; die Grössen ϱ, σ sind definirt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\hat\varrho_\mu^{(1)} &= c_\mu^{(11)}\varrho_\mu^{(1)} + c_\mu^{(12)}\varrho_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(1n)}\varrho_\mu^{(n)}, & \hat{\hat\sigma}_\mu^{(1)} &= r_\mu\left(d_\mu^{(11)}\sigma_\mu^{(1)} + d_\mu^{(12)}\sigma_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(1n)}\sigma_\mu^{(n)}\right),\\
\hat\varrho_\mu^{(2)} &= c_\mu^{(21)}\varrho_\mu^{(1)} + c_\mu^{(22)}\varrho_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(2n)}\varrho_\mu^{(n)}, & \hat{\hat\sigma}_\mu^{(2)} &= r_\mu\left(d_\mu^{(21)}\sigma_\mu^{(1)} + d_\mu^{(22)}\sigma_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(2n)}\sigma_\mu^{(n)}\right),\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
\hat\varrho_\mu^{(n)} &= c_\mu^{(n1)}\varrho_\mu^{(1)} + c_\mu^{(n2)}\varrho_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(nn)}\varrho_\mu^{(n)}, & \hat{\hat\sigma}_\mu^{(n)} &= r_\mu\left(d_\mu^{(n1)}\sigma_\mu^{(1)} + d_\mu^{(n2)}\sigma_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(nn)}\sigma_\mu^{(n)}\right),
\end{aligned}$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

und unter $\hat\gamma_\mu^{(\nu)}$, $\hat{\hat\delta}_\mu^{(\nu)}$ $\left(\begin{smallmatrix}\nu = 1, 2, \ldots, n\\ \mu = 1, 2, \ldots, p\end{smallmatrix}\right)$ endlich sind Grössen verstanden, die sich aus den γ, δ in derselben Weise zusammensetzen wie die $\hat\varrho$, $\hat{\hat\sigma}$ aus den ϱ, σ.

Lässt man bei festgehaltenen Werthen der $\varkappa$, λ, ϱ, σ an Stelle des Systems der $2np$ Buchstaben γ, δ alle Systeme von je $2np$ ganzen Zahlen treten, welche den Bedingungen $0 \leq \gamma_\mu^{(\nu)} \overline{\overline{<}} r_\mu - 1$, $0 \leq \delta_\mu^{(\nu)} \overline{\overline{<}} \varDelta_\mu - 1$ $\left(\begin{smallmatrix}\nu = 1, 2, \ldots, n\\ \mu = 1, 2, \ldots, p\end{smallmatrix}\right)$ genügen, so erhält man aus der Formel (Θ') ein System von $N = r_1^n \ldots r_p^n \varDelta_1^n \ldots \varDelta_p^n$ speciellen Formeln, von denen aber jede auf ihrer rechten Seite dieselben N Thetaproducte enthält. Um einen Einblick in die Natur dieses Gleichungensystems zu erhalten, setze man zur Abkürzung:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\bar\alpha^{(1)} + \bar\varkappa^{(1)}}{\varDelta} + \varrho^{(1)}\\ \dfrac{\bar\beta^{(1)} + \bar\lambda^{(1)}}{r} + \sigma^{(1)}\end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(1)}\right)\!\right)_{b^{(1)}} \cdots \vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\bar\alpha^{(n)} + \bar\varkappa^{(n)}}{\varDelta} + \varrho^{(n)}\\ \dfrac{\bar\beta^{(n)} + \bar\lambda^{(n)}}{r} + \sigma^{(n)}\end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(n)}\right)\!\right)_{b^{(n)}} e^{-\psi} = X_{\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right]},$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat\gamma^{(1)} + \hat\varrho^{(1)}}{r} + \varkappa^{(1)}\\ \dfrac{\hat{\hat\delta}^{(1)} + \hat{\hat\sigma}^{(1)}}{\varDelta} + \lambda^{(1)}\end{bmatrix}\left(\!\left(u^{(1)}\right)\!\right)_{a^{(1)}} \cdots \vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat\gamma^{(n)} + \hat\varrho^{(n)}}{r} + \varkappa^{(n)}\\ \dfrac{\hat{\hat\delta}^{(n)} + \hat{\hat\sigma}^{(n)}}{\varDelta} + \lambda^{(n)}\end{bmatrix}\left(\!\left(u^{(n)}\right)\!\right)_{a^{(n)}} e^{-\varphi} = Y_{\left[\begin{smallmatrix}\gamma\\ \delta\end{smallmatrix}\right]},$$

$$e^{2\pi i \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(\frac{\bar\alpha_\mu^{(\nu)}}{\varDelta_\mu}\delta_\mu^{(\nu)} - \frac{\bar\beta_\mu^{(\nu)}}{r_\mu}\gamma_\mu^{(\nu)}\right)} = e^{2\pi i \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(\alpha_\mu^{(\nu)}\frac{\hat{\hat\delta}_\mu^{(\nu)}}{\varDelta_\mu} - \beta_\mu^{(\nu)}\frac{\hat\gamma_\mu^{(\nu)}}{r_\mu}\right)} = C_{\left[\begin{smallmatrix}\gamma\\ \delta\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right]};$$

aus der Formel (Θ') geht dann die Gleichung:

$$(G) \qquad r_1^n \ldots r_p^n s_1 \ldots s_p\, Y_{\left[\begin{smallmatrix}\gamma\\ \delta\end{smallmatrix}\right]} = \sum_{\alpha,\beta} C_{\left[\begin{smallmatrix}\gamma\\ \delta\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right]} X_{\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right]}$$

hervor, und die Untersuchung des soeben definirten Systems specieller Thetaformeln ist damit zurückgeführt auf die Untersuchung des Systems jener N linearen Gleichungen, welche aus der aufgestellten Gleichung (G) hervorgehen, wenn man darin an Stelle des Zahlencomplexes $\left[\begin{smallmatrix}\gamma\\ \delta\end{smallmatrix}\right]$ die vorher definirten N Complexe von je $2np$ ganzen Zahlen treten lässt.

Bezeichnet man wie bisher die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(D_\mu)\; r_\mu \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\mu^{(\nu 1)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.}\varDelta_\mu),\; r_\mu \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\mu^{(\nu 2)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.}\varDelta_\mu),\; \ldots,\; r_\mu \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\mu^{(\nu n)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.}\varDelta_\mu),$$

welche die gleiche ist, wie die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(D'_\mu)\quad r_\mu \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\mu^{(1\nu)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} \varDelta_\mu),\ r_\mu \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\mu^{(2\nu)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} \varDelta_\mu),\ \ldots,\ r_\mu \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\mu^{(n\nu)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} \varDelta_\mu)$$

mit s_μ; ferner die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(C_\mu)\quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\mu^{(\nu 1)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} r_\mu),\ \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\mu^{(\nu 2)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} r_\mu),\ \ldots,\ \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\mu^{(\nu n)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} r_\mu),$$

welche die gleiche ist, wie die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(C'_\mu)\quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\mu^{(1\nu)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} r_\mu),\ \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\mu^{(2\nu)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} r_\mu),\ \ldots,\ \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\mu^{(n\nu)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} r_\mu)$$

mit s'_μ und setzt zur Abkürzung:

$$N = s_1 \ldots s_p s_1' \ldots s_p' N',$$

so ergiebt sich, dass man die N Summanden der auf der rechten Seite der Gleichung (G) stehenden Summe in N' Gruppen von je $s_1 \ldots s_p s_1' \ldots s_p'$ gleichen Summanden ordnen und daher die rechte Seite der Gleichung (G) selbst durch das $s_1 \ldots s_p s_1' \ldots s_p'$-fache einer Summe von nur N' Summanden ersetzen kann. Weiter folgt aber auch, dass die N linearen Gleichungen, welche aus der Gleichung (G) in der oben angegebenen Weise hervorgehen, in N' Gruppen von je $s_1 \ldots s_p s_1' \ldots s_p'$ unter einander nicht wesentlich verschiedenen Gleichungen angeordnet werden können, und es reducirt sich daher schliesslich das in Rede stehende System von N linearen Gleichungen immer auf ein System von N' linearen Gleichungen, die nur N' Grössen X und N' Grössen Y enthalten. Zur wirklichen Durchführung dieser Reduction müssen aber die Zahlenwerthe der Grössen c und r bekannt sein; solange dies nicht der Fall ist, wird das genannte nicht reducirte System von N linearen Gleichungen die Grundlage für die weiteren Untersuchungen zu bilden haben.

Das in Rede stehende System von N linearen Gleichungen kann nach den Grössen X als Unbekannten aufgelöst werden. Zu dem Ende multiplicire man linke und rechte Seite der Gleichung (G), indem man unter $\left[{\alpha' \atop \beta'}\right]$ einen beliebigen der N auf der rechten Seite dieser Gleichung bei Ausführung der Summation auftretenden Zahlencomplexe versteht, mit $C^{-1}_{\left[{\gamma \atop \delta}\right]\left[{\alpha' \atop \beta'}\right]}$ und summire für ${\nu = 1, 2, \ldots, n \atop \mu = 1, 2, \ldots, p}$ nach $\gamma_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis $r_\mu - 1$, nach $\delta_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis $\overline{\varDelta}_\mu - 1$. Unter Berücksichtigung der Relationen:

$$\sum_{\gamma,\delta} C_{\left[{\gamma \atop \delta}\right]\left[{\alpha \atop \beta}\right]} C^{-1}_{\left[{\gamma \atop \delta}\right]\left[{\alpha' \atop \beta'}\right]} = \begin{cases} 0, \text{ wenn nicht für jedes } \mu \text{ und } \nu\text{: } \alpha_\mu^{(\nu)} \equiv \alpha'^{(\nu)}_\mu (\text{mod.} \varDelta_\mu),\ \beta_\mu^{(\nu)} \equiv \beta'^{(\nu)}_\mu (\text{mod.} r_\mu), \\ N, \text{ wenn für jedes } \mu \text{ und } \nu\text{: } \bar{\alpha}_\mu^{(\nu)} \equiv \bar{\alpha}'^{(\nu)}_\mu (\text{mod.} \varDelta_\mu),\ \bar{\beta}_\mu^{(\nu)} \equiv \bar{\beta}'^{(\nu)}_\mu (\text{mod.} r_\mu), \end{cases}$$

erhält man dann ohne Mühe, wenn man zuletzt noch den Accent bei den Buchstaben α, β unterdrückt, die Gleichung:

$$(G')\qquad \varDelta_1^n \ldots \overline{\varDelta}_p^n s_1' \ldots s_p' X_{\left[{\alpha \atop \beta}\right]} = \sum_{\gamma,\delta} C^{-1}_{\left[{\gamma \atop \delta}\right]\left[{\alpha \atop \beta}\right]} Y_{\left[{\gamma \atop \delta}\right]}.$$

Aus dieser Gleichung geht aber, wenn man darin an Stelle des Systems der $2np$ Buchstaben α, β alle Systeme von je $2np$ ganzen Zahlen treten lässt, welche den Bedingungen $0 \leq \alpha_\mu^{(\nu)} \leqq \varDelta_\mu - 1$, $0 \leq \beta_\mu^{(\nu)} \leqq r_\mu - 1$ $\left({\nu = 1, 2, \ldots, n \atop \mu = 1, 2, \ldots, p}\right)$ genügen, ein System

von N linearen Gleichungen hervor, welches die gewünschte Auflösung des ursprünglichen, aus (G) abgeleiteten Systems von N linearen Gleichungen nach den Grössen X als Unbekannten darstellt.

Die Gleichung (G') ist entstanden, indem man die N speciellen Gleichungen, welche in der Gleichung (G) enthalten sind, linear verband. Aus diesen N Gleichungen lassen sich aber weiter auch, indem man nur einzelne, passend gewählte unter ihnen linear verbindet, Gleichungen in grosser Zahl ableiten, von denen jede mehrere Grössen X und mehrere Grössen Y enthält, und bei denen als Coefficienten ausschliesslich Grössen C und C^{-1} auftreten. Von der Aufstellung solcher Gleichungen soll aber hier abgesehen werden, und es möge bezüglich der Behandlung eines dahin gehörigen speciellen Falles auf die frühere Untersuchung*): „Über ein für die Theorie der Thetafunctionen fundamentales System linearer Gleichungen“ verwiesen werden.

3.

Man nehme jetzt an, dass drei in ihren Coefficienten a, b, c den für Parameter von Thetafunctionen bestehenden Bedingungen genügende quadratische Formen:

$$A = \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p}\left(a^{(1)}_{\mu\mu'}x^{(1)}_{\mu}x^{(1)}_{\mu'} + a^{(2)}_{\mu\mu'}x^{(2)}_{\mu}x^{(2)}_{\mu'} + \cdots + a^{(n)}_{\mu\mu'}x^{(n)}_{\mu}x^{(n)}_{\mu'}\right),$$

$$B = \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p}\left(b^{(1)}_{\mu\mu'}y^{(1)}_{\mu}y^{(1)}_{\mu'} + b^{(2)}_{\mu\mu'}y^{(2)}_{\mu}y^{(2)}_{\mu'} + \cdots + b^{(n)}_{\mu\mu'}y^{(n)}_{\mu}y^{(n)}_{\mu'}\right),$$

$$C = \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p}\left(c^{(1)}_{\mu\mu'}z^{(1)}_{\mu}z^{(1)}_{\mu'} + c^{(2)}_{\mu\mu'}z^{(2)}_{\mu}z^{(2)}_{\mu'} + \cdots + c^{(n)}_{\mu\mu'}z^{(n)}_{\mu}z^{(n)}_{\mu'}\right)$$

gegeben seien, die zudem so beschaffen sind, dass die Form A durch Anwendung der Substitution:

$$(S) \qquad r_{\mu}x^{(\nu)}_{\mu} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} c^{(\nu\varrho)}_{\mu}y^{(\varrho)}_{\mu}, \qquad \begin{pmatrix}\nu = 1, 2, \ldots, n\\ \mu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

bei der die c ganze Zahlen, die r positive ganze Zahlen bezeichnen, in die Form B, die Form B durch Anwendung der Substitution:

$$(S_1) \qquad s_{\mu}y^{(\nu)}_{\mu} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} d^{(\nu\sigma)}_{\mu}z^{(\sigma)}_{\mu}, \qquad \begin{pmatrix}\nu = 1, 2, \ldots, n\\ \mu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

bei der die d ganze Zahlen, die s positive ganze Zahlen bezeichnen, in die Form C, und daher auch die Form A durch Anwendung der aus (S) und (S_1) zusammengesetzten Substitution:

$$(S_2) \qquad r_{\mu}s_{\mu}x^{(\nu)}_{\mu} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} e^{(\nu\sigma)}_{\mu}z^{(\sigma)}_{\mu}, \qquad \begin{pmatrix}\nu = 1, 2, \ldots, n\\ \mu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

bei der:

$$e^{(\nu\sigma)}_{\mu} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} c^{(\nu\varrho)}_{\mu}d^{(\varrho\sigma)}_{\mu} \qquad \begin{pmatrix}\nu, \sigma = 1, 2, \ldots, n\\ \mu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

ist, in die Form C übergeht.

*) Prym, Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie. V. Leipzig 1882. Teubner.

Nach Früherem entspricht dann zunächst der Überführung der Form A in die Form B durch die Substitution (S) die in Art. 1 aufgestellte Formel (Θ), bei der das auf der linken Seite stehende Thetaproduct als Parameter die Coefficienten a der Form A, als Argumente von einander unabhängige Veränderliche u enthält, während die auf der rechten Seite der Formel vorkommenden Thetaproducte als Parameter die Coefficienten b der Form B, als Argumente Grössen v enthalten, die mit den Grössen u durch die Gleichungen:

$$(T) \qquad r_\mu v_\mu^{(\varrho)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\mu^{(\nu\varrho)} u_\mu^{(\nu)} \qquad \begin{pmatrix}\varrho = 1, 2, \ldots, n\\ \mu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

verknüpft sind.

In gleicher Weise entspricht weiter der Überführung der Form B in die Form C durch die Substitution (S_1) eine der Formel (Θ) analoge, mit (Θ_1) zu bezeichnende Formel, bei der als Parameter des auf der linken Seite stehenden Thetaproductes die Coefficienten b der Form B, als Parameter der auf der rechten Seite vorkommenden Thetaproducte die Coefficienten c der Form C auftreten. Als Argumente des auf der linken Seite stehenden Thetaproductes nehme man die auf der rechten Seite der Formel (Θ) vorkommenden oben definirten Grössen v und verwende mit Rücksicht darauf zur Bezeichnung der Argumente der auf der rechten Seite vorkommenden Thetaproducte den Buchstaben w. Die Grössen w sind dann mit den Grössen v durch die Gleichungen:

$$(T_1) \qquad s_\mu w_\mu^{(\sigma)} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} d_\mu^{(\varrho\sigma)} v_\mu^{(\varrho)} \qquad \begin{pmatrix}\sigma = 1, 2, \ldots, n\\ \mu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

verknüpft, mit den Grössen u dagegen durch die Gleichungen:

$$(T_2) \qquad r_\mu s_\mu w_\mu^{(\sigma)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} e_\mu^{(\nu\sigma)} u_\mu^{(\nu)}. \qquad \begin{pmatrix}\sigma = 1, 2, \ldots, n\\ \mu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

Endlich entspricht der Überführung der Form A in die Form C durch die Substitution (S_2) eine der Formel (Θ) analoge, mit (Θ_2) zu bezeichnende Formel, bei der als Parameter des auf der linken Seite stehenden Thetaproductes die Coefficienten a der Form A, als Parameter der auf der rechten Seite vorkommenden Thetaproducte die Coefficienten c der Form C auftreten. Als Argumente des auf der linken Seite stehenden Thetaproductes nehme man die in der Formel (Θ) vorkommenden Grössen u, die Argumente der auf der rechten Seite vorkommenden Thetaproducte sind dann mit den auf der rechten Seite der Formel (Θ_1) vorkommenden Grössen w identisch.

Die Formeln (Θ), (Θ_1), (Θ_2) sind dann nicht unabhängig von einander. Leitet man nämlich aus der Formel (Θ_1) durch passende Änderung der Argumente eine der Formel (Θ') des vorigen Artikels analoge, mit (Θ_1') zu bezeichnende Formel ab und drückt mit Hülfe dieser Formel ein jedes der auf der rechten Seite der Formel (Θ) vorkommenden Thetaproducte als lineare Function von Thetaproducten mit den Argumenten w und den Parametern c aus, so erhält man eine mit (Θ_2) zu bezeichnende Formel, welche ebenso wie die Formel (Θ_2) das Thetaproduct $\vartheta(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}} \vartheta(\!(u^{(2)})\!)_{a^{(2)}} \ldots \vartheta(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}}$ als lineare Function von Thetaproducten mit den Argumenten w und den Parametern c darstellt und sich von der Formel (Θ_2) nur durch die Form unterscheidet,

in dem Sinne, dass diese beiden Darstellungen (Θ_2) und $(\overline{\Theta}_2)$, wenn man bei jeder von ihnen die Charakteristiken der auf ihren rechten Seiten vorkommenden Thetaproducte auf Normalcharakteristiken reducirt und alsdann Glieder, welche dieselben Thetaproducte enthalten, vereinigt, nicht von einander verschieden sind.

Aus den in den Art. 2 und 3 des vorigen Abschnitts erhaltenen Resultaten geht hervor, dass jede Substitution (S) der früher betrachteten Art, welche eine Form A in eine Form B überführt, sich aus einer endlichen Anzahl ausgezeichneter Substitutionen $(\overline{S})$ zusammensetzen lässt. Verbindet man dieses Resultat mit dem soeben gewonnenen, so ergibt sich, dass man die Formel (Θ), welche der Überführung der Form A in die Form B durch die Substitution (S) entspricht, auch erhalten kann, indem man die den ausgezeichneten Substitutionen $(\overline{S})$ entsprechenden Formeln (Θ), (Θ') in oben angegebener Weise verbindet. Man kann sich demnach bei der Herstellung specieller Thetaformeln auf diejenigen charakteristischen Formeln (Θ), (Θ') beschränken, welche den durch die Untersuchungen des zweiten Abschnitts gewonnenen ausgezeichneten Substitutionen (S) entsprechen. Von diesen Formeln sollen in den zunächst folgenden Abschnitten diejenigen, welche für die Theorie der Thetafunctionen von Bedeutung sind, aufgestellt und in die einfachste Gestalt gebracht werden.

Vierter Abschnitt.

Erste Specialisirung der Fundamentalformel.

1.

Anknüpfend an die Untersuchungen des zweiten Abschnitts kann man das folgende Resultat aussprechen:

Die Form:

$$A = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \left(p^{(1)} x_\mu^{(1)} x_{\mu'}^{(1)} + p^{(2)} x_\mu^{(2)} x_{\mu'}^{(2)} + \cdots + p^{(n)} x_\mu^{(n)} x_{\mu'}^{(n)}\right),$$

bei der die p irgend welche positive rationale Zahlen bezeichnen sollen, geht durch Anwendung der Substitution:

$$(S) \qquad \left.\begin{aligned} x_\mu^{(1)} &= \phantom{-s^{(1)}} p^{(2)} y_\mu^{(1)} + p^{(3)} y_\mu^{(2)} + p^{(4)} y_\mu^{(3)} + \cdots + p^{(n)} y_\mu^{(n-1)} + y_\mu^{(n)}, \\ x_\mu^{(2)} &= - s^{(1)} y_\mu^{(1)} + p^{(3)} y_\mu^{(2)} + p^{(4)} y_\mu^{(3)} + \cdots + p^{(n)} y_\mu^{(n-1)} + y_\mu^{(n)}, \\ x_\mu^{(3)} &= \phantom{- s^{(1)} y_\mu^{(1)}} - s^{(2)} y_\mu^{(2)} + p^{(4)} y_\mu^{(3)} + \cdots + p^{(n)} y_\mu^{(n-1)} + y_\mu^{(n)}, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_\mu^{(n)} &= \phantom{- s^{(1)} y_\mu^{(1)} + p^{(3)} y_\mu^{(2)} + p^{(4)} y_\mu^{(3)} + \cdots} - s^{(n-1)} y_\mu^{(n-1)} + y_\mu^{(n)}, \end{aligned}\right\} (S_\mu)$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

wobei allgemein:

$$p^{(1)} + p^{(2)} + \cdots + p^{(\nu)} = s^{(\nu)}$$

gesetzt ist, über in die Form:

$$B = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \left(q^{(1)} y_\mu^{(1)} y_{\mu'}^{(1)} + q^{(2)} y_\mu^{(2)} y_{\mu'}^{(2)} + \cdots + q^{(n)} y_\mu^{(n)} y_{\mu'}^{(n)}\right),$$

bei der:

$$q^{(1)} = s^{(1)} s^{(2)} p^{(2)}, \quad q^{(2)} = s^{(2)} s^{(3)} p^{(3)}, \quad \ldots \quad q^{(n-1)} = s^{(n-1)} s^{(n)} p^{(n)}, \quad q^{(n)} = s^{(n)}$$

ist.

Unter der Voraussetzung, dass die Grössen $a_{\mu\mu'}$ den für Parameter von Thetafunctionen bestehenden Bedingungen genügen, die p aber positive ganze Zahlen sind, soll jetzt diejenige Thetaformel, welche der Überführung der Form A in die Form B durch die Substitution (S) entspricht, aus der in Art. 1 des dritten Abschnitts aufgestellten Fundamentalformel (Θ) abgeleitet werden.

Zu dem Ende hat man die in der Formel (Θ) vorkommenden Grössen $a^{(1)}_{\mu\mu'}, \ldots, a^{(n)}_{\mu\mu'}, b^{(1)}_{\mu\mu'}, \ldots, b^{(n)}_{\mu\mu'}$, $(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$ in die Coefficienten der soeben aufgestellten Formen A, B und zugleich die der Formel (Θ) zu Grunde liegende allgemeine Substitution (S) in die hier vorliegende specielle Substitution (S) übergehen zu lassen. Man erhält dann die gewünschte Thetaformel zunächst in der Gestalt:

$$\bar{s}^p \vartheta(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}} \vartheta(\!(u^{(2)})\!)_{a^{(2)}} \ldots \vartheta(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}}$$
$$= \sum_\alpha^{0, 1, \ldots, \varDelta - 1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(1)}}{\varDelta} \\ 0 \end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)_{b^{(1)}} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(2)}}{\varDelta} \\ 0 \end{bmatrix}(\!(v^{(2)})\!)_{b^{(2)}} \ldots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(n)}}{\varDelta} \\ 0 \end{bmatrix}(\!(v^{(n)})\!)_{b^{(n)}};$$

dabei ist zur Abkürzung:

$$s^{(2)} s^{(3)} \ldots s^{(n)} = \varDelta$$

gesetzt, das Zeichen $\sum\limits_\alpha^{0,1,\ldots,\varDelta-1}$ deutet an, dass nach jedem der np in den linearen Formen:

$$\bar{\alpha}^{(1)}_\mu = \frac{\varDelta}{s^{(1)} s^{(2)}} \left[s^{(1)}\left(\alpha^{(1)}_\mu - \alpha^{(2)}_\mu\right)\right],$$

$$\bar{\alpha}^{(2)}_\mu = \frac{\varDelta}{s^{(2)} s^{(3)}} \left[s^{(1)}\left(\alpha^{(1)}_\mu - \alpha^{(2)}_\mu\right) + s^{(2)}\left(\alpha^{(2)}_\mu - \alpha^{(3)}_\mu\right)\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{\alpha}^{(n-1)}_\mu = \frac{\varDelta}{s^{(n-1)} s^{(n)}} \left[s^{(1)}\left(\alpha^{(1)}_\mu - \alpha^{(2)}_\mu\right) + s^{(2)}\left(\alpha^{(2)}_\mu - \alpha^{(3)}_\mu\right) + \cdots + s^{(n-1)}\left(\alpha^{(n-1)}_\mu - \alpha^{(n)}_\mu\right)\right],$$

$$\bar{\alpha}^{(n)}_\mu = \frac{\varDelta}{s^{(n)}} \left[s^{(1)}\left(\alpha^{(1)}_\mu - \alpha^{(2)}_\mu\right) + s^{(2)}\left(\alpha^{(2)}_\mu - \alpha^{(3)}_\mu\right) + \cdots + s^{(n-1)}\left(\alpha^{(n-1)}_\mu - \alpha^{(n)}_\mu\right) + s^{(n)} \alpha^{(n)}_\mu\right],$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

vorkommenden α von 0 bis $\varDelta - 1$ zu summiren ist, und $\bar{s}$ bezeichnet die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$\frac{\varDelta}{s^{(1)} s^{(2)}} \left(p^{(1)} x^{(1)} - s^{(1)} x^{(2)}\right) \equiv 0 \pmod{\varDelta},$$

$$\frac{\varDelta}{s^{(2)} s^{(3)}} \left(p^{(1)} x^{(1)} + p^{(2)} x^{(2)} - s^{(2)} x^{(3)}\right) \equiv 0 \pmod{\varDelta},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\varDelta}{s^{(n-1)} s^{(n)}} \left(p^{(1)} x^{(1)} + p^{(2)} x^{(2)} + p^{(3)} x^{(3)} + \cdots + p^{(n-1)} x^{(n-1)} - s^{(n-1)} x^{(n)}\right) \equiv 0 \pmod{\varDelta},$$

$$\frac{\varDelta}{s^{(n)}} \left(p^{(1)} x^{(1)} + p^{(2)} x^{(2)} + p^{(3)} x^{(3)} + \cdots + p^{(n-1)} x^{(n-1)} + p^{(n)} x^{(n)}\right) \equiv 0 \pmod{\varDelta}.$$

Unter Berücksichtigung, dass die soeben genannte Zahl $\bar{s}$ den Werth:

$$\bar{s} = \varDelta^{n-1}$$

besitzt, und durch mehrfache leicht ersichtliche Umformungen kann man aber die gewonnene Thetaformel in die reducirte Gestalt:

$$(\Theta)\qquad \vartheta((u^{(1)}))_{a^{(1)}}\,\vartheta((u^{(2)}))_{a^{(2)}}\cdots\vartheta((u^{(n)}))_{a^{(n)}}$$

$$=\sum_{\varepsilon}\left\{\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\sigma^{(1)}}{s^{(1)}s^{(2)}}\\ 0\end{bmatrix}((v^{(1)}))_{b^{(1)}}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\sigma^{(2)}}{s^{(2)}s^{(3)}}\\ 0\end{bmatrix}((v^{(2)}))_{b^{(2)}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\sigma^{(n-1)}}{s^{(n-1)}s^{(n)}}\\ 0\end{bmatrix}((v^{(n-1)}))_{b^{(n-1)}}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\sigma^{(n-1)}}{s^{(n)}}\\ 0\end{bmatrix}((v^{(n)}))_{b^{(n)}}\right\}$$

bringen, wobei zur Abkürzung für $\begin{smallmatrix}\nu=1,\,2,\,\ldots,\,n-1\\ \mu=1,\,2,\,\ldots,\,p\end{smallmatrix}$:

$$s^{(1)}\varepsilon_\mu^{(1)}+s^{(2)}\varepsilon_\mu^{(2)}+\cdots+s^{(\nu)}\varepsilon_\mu^{(\nu)}=\sigma_\mu^{(\nu)}$$

gesetzt ist. In dieser Formel bezeichnen also $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(n)}$ irgend welche positive ganze Zahlen, aus denen sich die ganzen Zahlen $s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(n)}$ den Gleichungen $s^{(\nu)}=p^{(1)}+p^{(2)}+\cdots+p^{(\nu)}$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ gemäss zusammensetzen. Ferner ist:

$$a_{\mu\mu'}^{(1)}=p^{(1)}a_{\mu\mu'},\qquad a_{\mu\mu'}^{(2)}=p^{(2)}a_{\mu\mu'},\qquad\ldots,\qquad a_{\mu\mu'}^{(n-1)}=p^{(n-1)}a_{\mu\mu'},\qquad a_{\mu\mu'}^{(n)}=p^{(n)}a_{\mu\mu'},$$

$$b_{\mu\mu'}^{(1)}=s^{(1)}s^{(2)}p^{(2)}a_{\mu\mu'},\quad b_{\mu\mu'}^{(2)}=s^{(2)}s^{(3)}p^{(3)}a_{\mu\mu'},\quad\ldots,\quad b_{\mu\mu'}^{(n-1)}=s^{(n-1)}s^{(n)}p^{(n)}a_{\mu\mu'},\quad b_{\mu\mu'}^{(n)}=s^{(n)}a_{\mu\mu'},$$

$$\mu,\ \mu'=1,\ 2,\ \ldots,\ p;$$

weiter sind die Grössen v durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
v_\mu^{(1)}&=p^{(2)}u_\mu^{(1)}-s^{(1)}u_\mu^{(2)},\\
v_\mu^{(2)}&=p^{(3)}u_\mu^{(1)}+p^{(3)}u_\mu^{(2)}-s^{(2)}u_\mu^{(3)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_\mu^{(n-1)}&=p^{(n)}u_\mu^{(1)}+p^{(n)}u_\mu^{(2)}+p^{(n)}u_\mu^{(3)}+\cdots+p^{(n)}u_\mu^{(n-1)}-s^{(n-1)}u_\mu^{(n)},\\
v_\mu^{(n)}&=u_\mu^{(1)}\quad+u_\mu^{(2)}\quad+u_\mu^{(3)}\quad+\cdots+u_\mu^{(n-1)}\quad+u_\mu^{(n)},
\end{aligned}$$

$$\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ p,$$

mit den Grössen u verknüpft, und endlich deutet das Zeichen $\sum\limits_{\varepsilon}$ an, dass für $\begin{smallmatrix}\nu=1,\,2,\,\ldots,\,n-1\\ \mu=1,\,2,\,\ldots,\,p\end{smallmatrix}$ nach $\varepsilon_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis $s^{(\nu+1)}-1$ zu summiren ist.

2.

Setzt man in der Formel (Θ):

$$p^{(1)}=p^{(2)}=\cdots=p^{(n)}=1,$$

setzt gleichzeitig für $\mu=1, 2, \ldots, p$:

$$u_\mu^{(1)}=w_\mu+c_\mu^{(1)},\quad u_\mu^{(2)}=w_\mu+c_\mu^{(2)},\quad\ldots,\quad u_\mu^{(n-1)}=w_\mu+c_\mu^{(n-1)},\quad u_\mu^{(n)}=w_\mu+c_\mu^{(n)},$$

indem man unter w_μ eine veränderliche Grösse, unter $c_\mu^{(1)}, c_\mu^{(2)}, \ldots, c_\mu^{(n)}$ beliebige Constanten versteht, und beachtet, dass alsdann:

$$v_\mu^{(1)}=d_\mu^{(1)}-c_\mu^{(2)},\ v_\mu^{(2)}=d_\mu^{(2)}-2c_\mu^{(3)},\ \ldots,\ v_\mu^{(n-1)}=d_\mu^{(n-1)}-(n-1)c_\mu^{(n)},\ v_\mu^{(n)}=nw_\mu+s_\mu$$

wird, wenn man zur Abkürzung für $\nu=1, 2, \ldots, n-1$:

$$c_\mu^{(1)}+c_\mu^{(2)}+\cdots+c_\mu^{(\nu)}=d_\mu^{(\nu)}.$$

dagegen:

$$c_\mu^{(1)} + c_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(n)} = s_\mu$$

setzt, so geht aus der Formel (Θ) die Formel:

$$(\Pi) \quad \vartheta(\!(w + c^{(1)})\!)_1 \vartheta(\!(w + c^{(2)})\!)_1 \ldots \vartheta(\!(w + c^{(n)})\!)_1 = \sum_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p}^{0, 1, \ldots, n-1} C_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} \vartheta\begin{bmatrix} \varkappa \\ n \\ 0 \end{bmatrix} (\!(nw + s)\!)_n$$

hervor; dabei bezeichnet allgemein $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_m$ eine Thetafunction mit den Parametern $m a_{\mu\mu'}$ $(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$, und es ist:

$$C_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} = \sum_\varepsilon \left\{ \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\sigma^{(1)}}{1.2} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(d^{(1)} - c^{(2)})\!)_{1.2} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\sigma^{(2)}}{2.3} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(d^{(2)} - 2c^{(3)})\!)_{2.3} \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\sigma^{(n-2)}}{(n-2)(n-1)} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(d^{(n-2)} - \overline{n-2}\,c^{(n-1)})\!)_{(n-2)(n-1)} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\sigma^{(n-2)}}{n-1} - \frac{\varkappa}{n} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(d^{(n-1)} - \overline{n-1}\,c^{(n)})\!)_{(n-1)n} \right\},$$

wobei zur Abkürzung für ${\scriptstyle \nu = 1, 2, \ldots, n-2 \atop \mu = 1, 2, \ldots, p}$:

$$\varepsilon_\mu^{(1)} + 2\varepsilon_\mu^{(2)} + 3\varepsilon_\mu^{(3)} + \cdots + \nu\varepsilon_\mu^{(\nu)} = \sigma_\mu^{(\nu)}$$

gesetzt ist, und $\sum\limits_\varepsilon$ andeutet, dass für ${\scriptstyle \nu = 1, 2, \ldots, n-2 \atop \mu = 1, 2, \ldots, p}$ nach $\varepsilon_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis ν zu summiren ist. Man erkennt leicht, dass man diesen Ausdruck für $C_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ auch in die Gestalt:

$$C_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} = \sum_\eta \left\{ \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\eta^{(1)}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(d^{(1)} - c^{(2)})\!)_{1.2} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\eta^{(1)}}{2} - \frac{\eta^{(2)}}{3} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(d^{(2)} - 2c^{(3)})\!)_{2.3} \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\eta^{(n-3)}}{n-2} - \frac{\eta^{(n-2)}}{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(d^{(n-2)} - \overline{n-2}\,c^{(n-1)})\!)_{(n-2)(n-1)} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\eta^{(n-2)}}{n-1} - \frac{\varkappa}{n} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(d^{(n-1)} - \overline{n-1}\,c^{(n)})\!)_{(n-1)n} \right\}$$

bringen kann, wobei $\sum\limits_\eta$ andeutet, dass für ${\scriptstyle \nu = 1, 2, \ldots, n-2 \atop \mu = 1, 2, \ldots, p}$ nach $\eta_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis ν zu summiren ist.

Aus der Formel (Π) erhält man durch passende Änderung der in ihr vorkommenden Variablen w die allgemeinere:

$$(\Pi') \quad \begin{aligned} &\vartheta\begin{bmatrix} g \\ \frac{h+\lambda}{n} \end{bmatrix} (\!(w + c^{(1)})\!)_1 \ldots \vartheta\begin{bmatrix} g \\ \frac{h+\lambda}{n} \end{bmatrix} (\!(w + c^{(n)})\!)_1 e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu \lambda_\mu} \\ &= \sum_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}^{0, 1, \ldots, n-1} C_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} \vartheta\begin{bmatrix} g + \frac{\varkappa}{n} \\ h \end{bmatrix} (\!(nw + s)\!)_n e^{\frac{2\pi i}{n} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \varkappa_\mu \lambda_\mu}, \end{aligned}$$

bei der g, h beliebige reelle Constanten, die λ irgend welche ganze Zahlen bezeichnen.

Versteht man jetzt unter $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_p$ irgend welche ganze Zahlen, multiplicirt linke und rechte Seite der Formel (Π') mit:

$$e^{-\frac{2\pi i}{n}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\lambda_\mu \dot{\varkappa}_\mu}$$

und summirt nach jedem λ von 0 bis $n-1$, so erhält man, wenn man schliesslich den Punkt auf den Buchstaben $\varkappa$ unterdrückt, die Formel:

$$(II)\qquad \begin{aligned} & n^p C_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}\, \vartheta\begin{bmatrix} g+\frac{\varkappa}{n} \\ h \end{bmatrix}((nw+s))_n \\ & = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{0,1,\ldots,n-1} \vartheta\begin{bmatrix} g \\ \frac{h+\lambda}{n} \end{bmatrix}((w+c^{(1)}))_1 \ldots \vartheta\begin{bmatrix} g \\ \frac{h+\lambda}{n} \end{bmatrix}((w+c^{(n)}))_1\, e^{-\frac{2\pi i}{n}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(ng_\mu+\varkappa_\mu)\lambda_\mu}. \end{aligned}$$

Die Formel (*II*) gibt zu folgender Bemerkung Anlass. Die rechte Seite der Formel (*II*) ist ein linearer Ausdruck von n^p Thetafunctionen mit den Argumenten $nw_1+s_1 \mid \ldots \mid nw_p+s_p$, dessen Coefficienten C von den Variablen w nicht abhängen. Ändert man die willkürlichen Constanten c, jedoch so, dass die mit:

$$s_1 = c_1^{(1)}+c_1^{(2)}+\cdots+c_1^{(n)}, \quad \ldots, \quad s_p = c_p^{(1)}+c_p^{(2)}+\cdots+c_p^{(n)}$$

bezeichneten Verbindungen derselben keine Änderung erleiden, so ändern sich auf der rechten Seite der Formel (*II*) nur die Coefficienten C der n^p Thetafunctionen, während diese selbst völlig ungeändert bleiben. Nennt man daher allgemein ein Thetaproduct von der Form $\vartheta((w+c^{(1)}))_1\vartheta((w+c^{(2)}))_1 \ldots \vartheta((w+c^{(n)}))_1$, bei dem für $\mu = 1, 2, \ldots, p$ $c_\mu^{(1)}+c_\mu^{(2)}+\cdots+c_\mu^{(n)} = s_\mu$ ist, ein zu dem Constantensysteme $s_1 \mid \ldots \mid s_p$ gehöriges n-gliedriges Thetaproduct mit den Variablen $w_1 \mid \ldots \mid w_p$, so ergibt sich aus der Formel (*II*) unter Beachtung, dass zwischen n^p+1 linearen Formen von n^p Variablen immer eine lineare Relation mit constanten Coefficienten besteht, der folgende Satz:

Zwischen n^p+1 zu demselben Constantensysteme $s_1 \mid \ldots \mid s_p$ gehörigen n-gliedrigen Thetaproducten mit den Variablen $w_1 \mid \ldots \mid w_p$ besteht immer eine lineare Relation mit in Bezug auf die Variablen w constanten Coefficienten.

3.

Man setze jetzt in den Formeln (*II*), (*II'*), (*II*) sämmtliche Grössen c der Null gleich und bezeichne die neue Grösse, in welche alsdann $C_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ übergeht, mit $K_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$. Die Formel (*II*) geht dadurch in die Formel:

$$(II_0)\qquad \vartheta^n((w))_1 = \sum_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p}^{0,1,\ldots,n-1} K_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varkappa}{n} \\ 0 \end{bmatrix}((nw))_n$$

über, und es ist dabei:

$$K_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} = \sum_{\varepsilon} \Bigg\{ \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\sigma^{(1)}}{1.2} \\ 0 \end{bmatrix}((0))_{1.2}\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\sigma^{(2)}}{2.3} \\ 0 \end{bmatrix}((0))_{2.3} \ldots$$

$$\ldots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\sigma^{(n-2)}}{(n-2)(n-1)} \\ 0 \end{bmatrix}((0))_{(n-2)(n-1)}\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\sigma^{(n-2)}}{n-1} \quad \frac{\varkappa}{n} \\ 0 \end{bmatrix}((0))_{(n-1)n} \Bigg\},$$

wobei zur Abkürzung für ${\nu=1,2,\ldots,n-2 \atop \mu=1,2,\ldots,p}$:

$$\varepsilon_\mu^{(1)} + 2\varepsilon_\mu^{(2)} + 3\varepsilon_\mu^{(3)} + \cdots + \nu\varepsilon_\mu^{(\nu)} = \sigma_\mu^{(\nu)}$$

gesetzt ist, und $\sum\limits_\varepsilon$ andeutet, dass für ${\nu=1,2,\ldots,n-2 \atop \mu=1,2,\ldots,p}$ nach $\varepsilon_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis ν zu summiren ist; oder in anderer Form:

$$K_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p} = \sum_\eta \left\{ \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\eta^{(1)}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}((0))_{1\,.\,2}\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{\eta^{(1)}}{2} - \frac{\eta^{(2)}}{3} \\ 0 \end{bmatrix}((0))_{2\,.\,3}\cdots\right.$$

$$\left.\ldots\vartheta\begin{bmatrix} \frac{\eta^{(n-3)}}{n-2} - \frac{\eta^{(n-2)}}{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}((0))_{(n-2)(n-1)}\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{\eta^{(n-2)}}{n-1} - \frac{\varkappa}{n} \\ 0 \end{bmatrix}((0))_{(n-1)n}\right\},$$

wobei $\sum\limits_\eta$ andeutet, dass für ${\nu=1,2,\ldots,n-2 \atop \mu=1,2,\ldots,p}$ nach $\eta_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis ν zu summiren ist.

Es geht weiter aus der Formel (II'), wenn man darin noch für $\mu=1,2,\ldots,p$ die Grösse h_μ jetzt mit nh_μ bezeichnet und alle Zahlen λ der Null gleich setzt, die Formel:

$$(II_0') \qquad \vartheta^n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((w))_1 = \sum_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p}^{0,1,\ldots,n-1} K_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}\,\vartheta\begin{bmatrix} g+\frac{\varkappa}{n} \\ nh \end{bmatrix}((nw))_n$$

hervor, bei der die g, h beliebige reelle Constanten bezeichnen.

Es geht endlich die Formel (II), wenn man darin noch für $\mu=1,2,\ldots,p$ g_μ durch $g_\mu - \frac{\varkappa_\mu}{n}$ ersetzt, in die Formel:

$$(II_0) \qquad n^p K_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((nw))_n = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{0,1,\ldots,n-1} \vartheta^n\begin{bmatrix} g-\frac{\varkappa}{n} \\ \frac{h+\lambda}{n} \end{bmatrix}((w))_1\, e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu\lambda_\mu}$$

über, bei der die g, h beliebige reelle Constanten, die $\varkappa$ irgend welche ganze Zahlen bezeichnen.

Die vorstehenden Formeln sind für die im zweiten Theile dieser Arbeit zu entwickelnde Transformationstheorie von besonderer Bedeutung, und es wird dort Anlass sein, auf dieselben zurückzukommen.

Fünfter Abschnitt.

Zweite Specialisirung der Fundamentalformel.

1.

Anknüpfend an die Untersuchungen des zweiten Abschnitts kann man weiter das folgende Resultat aussprechen.

Die Form:

$$A = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \left(q^{(1)} x_\mu^{(1)} x_{\mu'}^{(1)} + q^{(2)} x_\mu^{(2)} x_{\mu'}^{(2)} + \cdots + q^{(n)} x_\mu^{(n)} x_{\mu'}^{(n)} \right),$$

bei der die q irgend welche positive rationale Zahlen bezeichnen sollen, geht durch Anwendung der Substitution:

$$(S) \qquad \left. \begin{aligned} s x_\mu^{(1)} &= (2q^{(1)} - s) y_\mu^{(1)} + 2q^{(2)} y_\mu^{(2)} + \cdots + 2q^{(n)} y_\mu^{(n)}, \\ s x_\mu^{(2)} &= 2q^{(1)} y_\mu^{(1)} + (2q^{(2)} - s) y_\mu^{(2)} + \cdots + 2q^{(n)} y_\mu^{(n)}, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s x_\mu^{(n)} &= 2q^{(1)} y_\mu^{(1)} + 2q^{(2)} y_\mu^{(2)} + \cdots + (2q^{(n)} - s) y_\mu^{(n)}, \end{aligned} \right\} (S_\mu)$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

wobei:

$$q^{(1)} + q^{(2)} + \cdots + q^{(n)} = s$$

gesetzt ist, über in die Form:

$$B = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \left(q^{(1)} y_\mu^{(1)} y_{\mu'}^{(1)} + q^{(2)} y_\mu^{(2)} y_{\mu'}^{(2)} + \cdots + q^{(n)} y_\mu^{(n)} y_{\mu'}^{(n)} \right).$$

Unter der Voraussetzung, dass die Grössen $a_{\mu\mu'}$ den für Parameter von Thetafunctionen bestehenden Bedingungen genügen, die q aber positive ganze Zahlen ohne einen allen gemeinsamen Theiler sind, soll jetzt diejenige Thetaformel, welche der Überführung der Form A in die Form B durch die Substitution (S) entspricht, aus der in Art. 1 des dritten Abschnitts aufgestellten Fundamentalformel (Θ) abgeleitet werden.

Zu dem Ende hat man die in der Formel (Θ) vorkommenden Grössen $a_{\mu\mu'}^{(1)}, \ldots, a_{\mu\mu'}^{(n)}, b_{\mu\mu'}^{(1)}, \ldots, b_{\mu\mu'}^{(n)}$ $(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$ in die Coefficienten der soeben aufgestellten Formen A, B und zugleich die der Formel (Θ) zu Grunde liegende allgemeine Substitution (S) in die hier vorliegende specielle Substitution (S) übergehen zu lassen. Man erhält dann die gewünschte Thetaformel zunächst in der Gestalt:

$$s^{np}\bar{s}\,\vartheta\left(\!\left(u^{(1)}\right)\!\right)_{a^{(1)}}\vartheta\left(\!\left(u^{(2)}\right)\!\right)_{a^{(2)}}\cdots\vartheta\left(\!\left(u^{(n)}\right)\!\right)_{a^{(n)}}$$

$$=\sum_{\alpha}^{0,1,\ldots,s^n-1}\;\sum_{\beta}^{0,1,\ldots,s-1}\vartheta\begin{bmatrix}\bar{\bar{\alpha}}^{(1)}\\ \Delta\\ \bar{\beta}^{(1)}\\ s\end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(1)}\right)\!\right)_{a^{(1)}}\vartheta\begin{bmatrix}\bar{\bar{\alpha}}^{(2)}\\ \Delta\\ \bar{\beta}^{(2)}\\ s\end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(2)}\right)\!\right)_{a^{(2)}}\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\bar{\bar{\alpha}}^{(n)}\\ \Delta\\ \bar{\beta}^{(n)}\\ s\end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(n)}\right)\!\right)_{a^{(n)}};$$

dabei ist zur Abkürzung:

$$(-1)^{n-1}s^n=\Delta$$

gesetzt, das Zeichen $\sum\limits_{\alpha}^{0,1,\ldots,s^n-1}$ deutet an, dass nach jedem der np in den linearen Formen:

$$\bar{\bar{\alpha}}_{\mu}^{(1)}=\frac{2\Delta}{s}\left(q^{(1)}\alpha_{\mu}^{(1)}+q^{(2)}\alpha_{\mu}^{(2)}+\cdots+q^{(n)}\alpha_{\mu}^{(n)}\right)-\Delta\alpha_{\mu}^{(1)},$$

$$\bar{\bar{\alpha}}_{\mu}^{(2)}=\frac{2\Delta}{s}\left(q^{(1)}\alpha_{\mu}^{(1)}+q^{(2)}\alpha_{\mu}^{(2)}+\cdots+q^{(n)}\alpha_{\mu}^{(n)}\right)-\Delta\alpha_{\mu}^{(2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{\bar{\alpha}}_{\mu}^{(n)}=\frac{2\Delta}{s}\left(q^{(1)}\alpha_{\mu}^{(1)}+q^{(2)}\alpha_{\mu}^{(2)}+\cdots+q^{(n)}\alpha_{\mu}^{(n)}\right)-\Delta\alpha_{\mu}^{(n)},$$

$$\mu=1,2,\ldots,p,$$

vorkommenden α von 0 bis s^n-1 zu summiren ist, entsprechend deutet das Zeichen $\sum\limits_{\beta}^{0,1,\ldots,s-1}$ an, dass nach jedem der np in den linearen Formen:

$$\bar{\beta}_{\mu}^{(1)}=2q^{(1)}\left(\beta_{\mu}^{(1)}+\beta_{\mu}^{(2)}+\cdots+\beta_{\mu}^{(n)}\right)-s\beta_{\mu}^{(1)},$$

$$\bar{\beta}_{\mu}^{(2)}=2q^{(2)}\left(\beta_{\mu}^{(1)}+\beta_{\mu}^{(2)}+\cdots+\beta_{\mu}^{(n)}\right)-s\beta_{\mu}^{(2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{\beta}_{\mu}^{(n)}=2q^{(n)}\left(\beta_{\mu}^{(1)}+\beta_{\mu}^{(2)}+\cdots+\beta_{\mu}^{(n)}\right)-s\beta_{\mu}^{(n)},$$

$$\mu=1,2,\ldots,p,$$

vorkommenden β von 0 bis $s-1$ zu summiren ist, und endlich bezeichnet $\bar{s}$ die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$\frac{\Delta}{s}\left[(2q^{(1)}-s)x^{(1)}+2q^{(2)}x^{(2)}+\cdots+2q^{(n)}x^{(n)}\right]\equiv 0\ (\text{mod. }\Delta),$$

$$\frac{\Delta}{s}\left[2q^{(1)}x^{(1)}+(2q^{(2)}-s)x^{(2)}+\cdots+2q^{(n)}x^{(n)}\right]\equiv 0\ (\text{mod. }\Delta),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\Delta}{s}\left[2q^{(1)}x^{(1)}+2q^{(2)}x^{(2)}+\cdots+(2q^{(n)}-s)x^{(n)}\right]\equiv 0\ (\text{mod. }\Delta).$$

Unter Berücksichtigung, dass die soeben genannte Zahl $\bar{s}$ den Werth:

$$\bar{s}=\frac{3+(-1)^s}{2}\,s^{n^2-1}$$

besitzt, und durch mehrfache leicht ersichtliche Umformungen*) kann man aber die gewonnene Thetaformel in die reducirte Gestalt:

*) Man vergl. hierzu den Art. 2 der Abhandlung: Krazer und Prym, Über die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel (Acta mathematica, Bd. 3, pag. 240), wo diese Umformungen in einem speciellen Falle vollständig durchgeführt sind.

$$(\Theta)\qquad \begin{aligned}&\left(\frac{3+(-1)^s}{2}\right)^p s^p\,\vartheta\big(\!\big(u^{(1)}\big)\!\big)_{a^{(1)}}\,\vartheta\big(\!\big(u^{(2)}\big)\!\big)_{a^{(2)}}\cdots\vartheta\big(\!\big(u^{(n)}\big)\!\big)_{a^{(n)}}\\ &=\sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,s-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2\alpha}{s}\\ \frac{2q^{(1)}\beta}{s}\end{bmatrix}\big(\!\big(v^{(1)}\big)\!\big)_{a^{(1)}}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2\alpha}{s}\\ \frac{2q^{(2)}\beta}{s}\end{bmatrix}\big(\!\big(v^{(2)}\big)\!\big)_{a^{(2)}}\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2\alpha}{s}\\ \frac{2q^{(n)}\beta}{s}\end{bmatrix}\big(\!\big(v^{(n)}\big)\!\big)_{a^{(n)}}\,e^{-\frac{4\pi i}{s}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\alpha_\mu\beta_\mu}\end{aligned}$$

bringen. In dieser Formel bezeichnen also $q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(n)}$ positive ganze Zahlen ohne einen allen gemeinsamen Factor, auch ist zur Abkürzung $q^{(1)}+q^{(2)}+\cdots+q^{(n)}=s$ gesetzt. Ferner ist für $\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p$:

$$a^{(1)}_{\mu\mu'} = q^{(1)}a_{\mu\mu'},\quad a^{(2)}_{\mu\mu'} = q^{(2)}a_{\mu\mu'},\quad \ldots,\quad a^{(n)}_{\mu\mu'} = q^{(n)}a_{\mu\mu'};$$

weiter sind die Grössen u, v durch das involutorische Gleichungensystem:

$$\begin{aligned}
sv^{(1)}_\mu &= (2q^{(1)}-s)u^{(1)}_\mu + 2q^{(1)}u^{(2)}_\mu + \cdots + 2q^{(1)}u^{(n)}_\mu,\\
sv^{(2)}_\mu &= 2q^{(2)}u^{(1)}_\mu + (2q^{(2)}-s)u^{(2)}_\mu + \cdots + 2q^{(2)}u^{(n)}_\mu,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
sv^{(n)}_\mu &= 2q^{(n)}u^{(1)}_\mu + 2q^{(n)}u^{(2)}_\mu + \cdots + (2q^{(n)}-s)u^{(n)}_\mu,
\end{aligned}$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

verknüpft, und endlich deutet das Zeichen $\sum\limits_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,s-1}$ an, dass für $\mu = 1, 2, \ldots, p$ sowohl nach α_μ wie nach β_μ von 0 bis $s-1$ zu summiren ist.

2.

Aus der gewonnenen Formel (Θ) erhält man durch passende Änderung der in ihr vorkommenden Variablen u, v die allgemeinere:

$$(\Theta')\qquad \begin{aligned}&\left(\frac{3+(-1)^s}{2}\right)^p s^p\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2\gamma}{s}+\varkappa^{(1)}\\ \frac{2q^{(1)}\delta}{s}+\lambda^{(1)}\end{bmatrix}\big(\!\big(u^{(1)}\big)\!\big)_{a^{(1)}}\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2\gamma}{s}+\varkappa^{(n)}\\ \frac{2q^{(n)}\delta}{s}+\lambda^{(n)}\end{bmatrix}\big(\!\big(u^{(n)}\big)\!\big)_{a^{(n)}}e^{\varphi}\\ &=\sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,s-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2(\alpha+\bar{\bar{\varkappa}})}{s}-\varkappa^{(1)}\\ \frac{2q^{(1)}(\beta+\bar{\lambda})}{s}-\lambda^{(1)}\end{bmatrix}\big(\!\big(v^{(1)}\big)\!\big)_{a^{(1)}}\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2(\alpha+\bar{\bar{\varkappa}})}{s}-\varkappa^{(n)}\\ \frac{2q^{(n)}(\beta+\bar{\lambda})}{s}-\lambda^{(n)}\end{bmatrix}\big(\!\big(v^{(n)}\big)\!\big)_{a^{(n)}}e^{\psi}\\ &\qquad\qquad\times e^{\frac{4\pi i}{s}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\alpha_\mu\delta_\mu-\beta_\mu\gamma_\mu)},\end{aligned}$$

wobei:

$$\varphi = -\frac{4\pi i}{s}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}(\gamma_\mu+\bar{\bar{\varkappa}}_\mu)\delta_\mu,\qquad\qquad \psi = -\frac{4\pi i}{s}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}(\alpha_\mu+\bar{\bar{\varkappa}}_\mu)\beta_\mu$$

ist, ferner $\varkappa^{(\nu)}_\mu$, $\lambda^{(\nu)}_\mu$ $\binom{\nu=1,2,\ldots,n}{\mu=1,2,\ldots,p}$ $2np$ beliebige reelle Grössen, γ_μ, δ_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ irgend $2p$ ganze Zahlen bezeichnen, und zur Abkürzung für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$q^{(1)}\varkappa^{(1)}_\mu + q^{(2)}\varkappa^{(2)}_\mu + \cdots + q^{(n)}\varkappa^{(n)}_\mu = \bar{\bar{\varkappa}}_\mu,\quad \lambda^{(1)}_\mu + \lambda^{(2)}_\mu + \cdots + \lambda^{(n)}_\mu = \bar{\lambda}_\mu$$

gesetzt ist.

Es soll jetzt der Fall, wo die ganze Zahl s ungerade ist, von dem Falle, wo s gerade ist, getrennt werden. Ist:

s eine ungerade Zahl, $s = 2s' - 1$,

so kann man die Formel (Θ') in die Gestalt:

$$(\Theta_1')_{s=2s'-1}\qquad s^p\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\gamma}{s}+\varkappa^{(1)}\\ \frac{q^{(1)}\delta}{s}+\lambda^{(1)}\end{bmatrix}\left(\!\left(u^{(1)}\right)\!\right)_{a^{(1)}}\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\gamma}{s}+\varkappa^{(n)}\\ \frac{q^{(n)}\delta}{s}+\lambda^{(n)}\end{bmatrix}\left(\!\left(u^{(n)}\right)\!\right)_{a^{(n)}}e^{\varphi_1}$$

$$=\sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,s-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\alpha+2\bar{\bar{\varkappa}}}{s}-\varkappa^{(1)}\\ \frac{q^{(1)}(\beta+2\bar{\bar{\lambda}})}{s}-\lambda^{(1)}\end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(1)}\right)\!\right)_{a^{(1)}}\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\alpha+2\bar{\bar{\varkappa}}}{s}-\varkappa^{(n)}\\ \frac{q^{(n)}(\beta+2\bar{\bar{\lambda}})}{s}-\lambda^{(n)}\end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(n)}\right)\!\right)_{a^{(n)}}e^{\psi_1}$$

$$\times e^{-\frac{s-1}{s}\pi i\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\alpha_\mu\delta_\mu-\beta_\mu\gamma_\mu)},$$

wobei:

$$\varphi_1=\frac{s-1}{s}\pi i\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\gamma_\mu\delta_\mu-\frac{2\pi i}{s}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\bar{\bar{\varkappa}}_\mu\delta_\mu,\qquad \psi_1=\frac{s-1}{s}\pi i\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\alpha_\mu\beta_\mu-\frac{2\pi i}{s}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\bar{\bar{\varkappa}}_\mu\beta_\mu$$

ist, bringen. Ist dagegen:

s eine gerade Zahl, $s = 2s'$,

so kann man die Formel (Θ') in die Gestalt:

$$(\Theta_2')_{s=2s'}\qquad s'^p\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\gamma}{s'}+\varkappa^{(1)}\\ \frac{q^{(1)}\delta}{s'}+\lambda^{(1)}\end{bmatrix}\left(\!\left(u^{(1)}\right)\!\right)_{a^{(1)}}\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\gamma}{s'}+\varkappa^{(n)}\\ \frac{q^{(n)}\delta}{s'}+\lambda^{(n)}\end{bmatrix}\left(\!\left(u^{(n)}\right)\!\right)_{a^{(n)}}e^{\varphi_2}$$

$$=\sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,s'-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\alpha+\bar{\bar{\varkappa}}}{s'}-\varkappa^{(1)}\\ \frac{q^{(1)}(\beta+\bar{\bar{\lambda}})}{s'}-\lambda^{(1)}\end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(1)}\right)\!\right)_{a^{(1)}}\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\alpha+\bar{\bar{\varkappa}}}{s'}-\varkappa^{(n)}\\ \frac{q^{(n)}(\beta+\bar{\bar{\lambda}})}{s'}-\lambda^{(n)}\end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(n)}\right)\!\right)_{a^{(n)}}e^{\psi_2}$$

$$\times e^{\frac{2\pi i}{s'}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\alpha_\mu\delta_\mu-\beta_\mu\gamma_\mu)},$$

wobei:

$$\varphi_2=-\frac{2\pi i}{s'}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}(\gamma_\mu+\bar{\bar{\varkappa}}_\mu)\delta_\mu,\qquad \psi_2=-\frac{2\pi i}{s'}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}(\alpha_\mu+\bar{\bar{\varkappa}}_\mu)\beta_\mu$$

ist, bringen.

Setzt man in den Formeln (Θ'), (Θ_1'), (Θ_2') die Grössen γ, δ, $\varkappa$, λ sämmtlich der Null gleich, so geht die Formel (Θ') in die Formel (Θ) des vorigen Artikels über, und entsprechend verwandeln sich die Formeln (Θ_1'), (Θ_2') in diejenigen Formeln, welche man erhalten würde, wenn man die beiden aus (Θ) durch Trennung des Falles, wo s ungerade, von dem Falle, wo s gerade ist, hervorgehenden Formeln in die einfachste Gestalt brächte.

3.

Zum Schlusse dieses Abschnittes sollen jetzt noch die aus den Formeln (Θ'), (Θ_1'), (Θ_2') für $q^{(1)} = q^{(2)} = \cdots = q^{(n)} = 1$ hervorgehenden, im Späteren zur Verwendung kommenden speciellen Formeln unter gleichzeitiger Einführung einer übersichtlicheren Bezeichnung aufgestellt werden.

Es geht zunächst die Formel (Θ') in die Formel:

$$(\bar{\Theta}')\qquad \begin{aligned} &\left(\frac{3+(-1)^r}{2}\right)^p r^p\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2\eta}{r}+\varkappa^{(1)}\\ \frac{2\eta'}{r}+\varkappa'^{(1)}\end{bmatrix}(\!(u^{(1)})\!)_a \cdots \vartheta\begin{bmatrix}\frac{2\eta}{r}+\varkappa^{(r)}\\ \frac{2\eta'}{r}+\varkappa'^{(r)}\end{bmatrix}(\!(u^{(r)})\!)_a\, e^{-\frac{4\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{p}(\eta_\mu+\bar{\varkappa}_\mu)\eta'_\mu} \\ &=\sum_{\varepsilon,\varepsilon'}^{0,1,\ldots,r-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2(\varepsilon+\bar{\varkappa})}{r}-\varkappa^{(1)}\\ \frac{2(\varepsilon'+\bar{\varkappa}')}{r}-\varkappa'^{(1)}\end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)_a \cdots \vartheta\begin{bmatrix}\frac{2(\varepsilon+\bar{\varkappa})}{r}-\varkappa^{(r)}\\ \frac{2(\varepsilon'+\bar{\varkappa}')}{r}-\varkappa'^{(r)}\end{bmatrix}(\!(v^{(r)})\!)_a\, e^{-\frac{4\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu+\bar{\varkappa}_\mu)\varepsilon'_\mu} \\ &\qquad\qquad \times e^{\frac{4\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\eta'_\mu-\varepsilon'_\mu\eta_\mu)} \end{aligned}$$

über, bei der r irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet, und die Grössen u, v durch das involutorische orthogonale Gleichungensystem:

$$\begin{aligned} r v_\mu^{(1)} &= (2-r)u_\mu^{(1)} + 2u_\mu^{(2)} + \cdots + 2u_\mu^{(r)}, \\ r v_\mu^{(2)} &= 2u_\mu^{(1)} + (2-r)u_\mu^{(2)} + \cdots + 2u_\mu^{(r)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r v_\mu^{(r)} &= 2u_\mu^{(1)} + 2u_\mu^{(2)} + \cdots + (2-r)u_\mu^{(r)}, \\ \mu &= 1, 2, \ldots, p, \end{aligned}$$

verknüpft sind.

Es geht weiter die Formel (Θ_1') in die Formel:

$$\underset{r=2r'-1}{(\bar{\Theta}_1')}\qquad \begin{aligned} &r^p\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta}{r}+\varkappa^{(1)}\\ \frac{\eta'}{r}+\varkappa'^{(1)}\end{bmatrix}(\!(u^{(1)})\!)_a \cdots \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta}{r}+\varkappa^{(r)}\\ \frac{\eta'}{r}+\varkappa'^{(r)}\end{bmatrix}(\!(u^{(r)})\!)_a\, e^{\frac{r-1}{r}\pi i\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\eta_\mu\eta'_\mu-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\bar{\varkappa}_\mu\eta'_\mu} \\ &=\sum_{\varepsilon,\varepsilon'}^{0,1,\ldots,r-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon+2\bar{\varkappa}}{r}-\varkappa^{(1)}\\ \frac{\varepsilon'+2\bar{\varkappa}'}{r}-\varkappa'^{(1)}\end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)_a \cdots \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon+2\bar{\varkappa}}{r}-\varkappa^{(r)}\\ \frac{\varepsilon'+2\bar{\varkappa}'}{r}-\varkappa'^{(r)}\end{bmatrix}(\!(v^{(r)})\!)_a\, e^{\frac{r-1}{r}\pi i\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu\varepsilon'_\mu-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\bar{\varkappa}_\mu\varepsilon'_\mu} \\ &\qquad\qquad \times e^{-\frac{r-1}{r}\pi i\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\eta'_\mu-\varepsilon'_\mu\eta_\mu)} \end{aligned}$$

über, bei der $r = 2r' - 1$ irgend eine positive ungerade Zahl bezeichnet, und die Grössen u, v durch das involutorische orthogonale Gleichungensystem:

$$\begin{aligned} r v_\mu^{(1)} &= (2-r)u_\mu^{(1)} + 2u_\mu^{(2)} + \cdots + 2u_\mu^{(r)}, \\ r v_\mu^{(2)} &= 2u_\mu^{(1)} + (2-r)u_\mu^{(2)} + \cdots + 2u_\mu^{(r)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r v_\mu^{(r)} &= 2u_\mu^{(1)} + 2u_\mu^{(2)} + \cdots + (2-r)u_\mu^{(r)}, \\ \mu &= 1, 2, \ldots, p, \end{aligned}$$

verknüpft sind.

Es geht endlich die Formel (Θ_2') in die Formel:

$$(\Theta_2')_{r=2r'} \quad r'^p \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\eta}{r'} + \varkappa^{(1)} \\ \frac{\eta'}{r'} + \varkappa'^{(1)} \end{bmatrix}((u^{(1)}))_a \ldots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\eta}{r'} + \varkappa^{(2r')} \\ \frac{\eta'}{r'} + \varkappa'^{(2r')} \end{bmatrix}((u^{(2r')}))_a e^{-\frac{2\pi i}{r'}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\eta_\mu + \bar{\varkappa}_\mu)\eta'_\mu}$$

$$= \sum_{\varepsilon, \varepsilon'}^{0, 1, \ldots, r'-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon + \bar{\varkappa}}{r'} - \varkappa^{(1)} \\ \frac{\varepsilon' + \bar{\varkappa}'}{r'} - \varkappa'^{(1)} \end{bmatrix}((v^{(1)}))_a \ldots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon + \bar{\varkappa}}{r'} - \varkappa^{(2r')} \\ \frac{\varepsilon' + \bar{\varkappa}'}{r'} - \varkappa'^{(2r')} \end{bmatrix}((v^{(2r')}))_a e^{-\frac{2\pi i}{r'}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu + \bar{\varkappa}_\mu)\varepsilon'_\mu}$$

$$\times e^{\frac{2\pi i}{r'}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu \eta'_\mu - \varepsilon'_\mu \eta_\mu)}$$

über, bei der $r = 2r'$ irgend eine positive gerade Zahl bezeichnet, und die Grössen u, v durch das involutorische orthogonale Gleichungensystem:

$$\begin{aligned}
r' v_\mu^{(1)} &= (1 - r') u_\mu^{(1)} + u_\mu^{(2)} + \cdots + u_\mu^{(2r')}, \\
r' v_\mu^{(2)} &= u_\mu^{(1)} + (1 - r') u_\mu^{(2)} + \cdots + u_\mu^{(2r')}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
r' v_\mu^{(2r')} &= u_\mu^{(1)} + u_\mu^{(2)} + \cdots + (1 - r') u_\mu^{(2r')}, \\
&\mu = 1, 2, \ldots, p,
\end{aligned}$$

verknüpft sind.

Bei einer jeden der drei Formeln $(\bar{\Theta}')$, (Θ_1'), (Θ_2') sind unter η_μ, η'_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ irgend welche ganze Zahlen, unter $\varkappa_\mu^{(\nu)}$, $\varkappa_\mu'^{(\nu)}$ $\left(\begin{smallmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, r \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{smallmatrix}\right)$ irgend welche reelle Grössen zu verstehen, während die Grössen $\bar{\varkappa}_\mu$, $\bar{\varkappa}'_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ durch die Gleichungen:

$$\bar{\varkappa}_\mu = \varkappa_\mu^{(1)} + \varkappa_\mu^{(2)} + \cdots + \varkappa_\mu^{(r)}, \qquad \bar{\varkappa}'_\mu = \varkappa_\mu'^{(1)} + \varkappa_\mu'^{(2)} + \cdots + \varkappa_\mu'^{(r)}$$

definirt sind.

Die Formeln $(\bar{\Theta}_1')$, $(\bar{\Theta}_2')$ stimmen, von den Grössen $\varkappa$, $\varkappa'$ abgesehen, mit den in der Abhandlung: „Über die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel"*) aufgestellten Formeln (Θ_1'), (Θ_2') überein.

*) Acta mathematica, Bd 3, pag. 240.

Sechster Abschnitt.

Aufstellung einiger für die Theorie der Thetafunctionen wichtigen orthogonalen Gleichungensysteme.

1.

Soll die Form:

$$X = x^{(1)^2} + x^{(2)^2} + \cdots + x^{(n)^2}$$

durch die Substitution:

$$(O)\qquad \begin{aligned} rx^{(1)} &= c^{(11)}y^{(1)} + c^{(12)}y^{(2)} + \cdots + c^{(1n)}y^{(n)},\\ rx^{(2)} &= c^{(21)}y^{(1)} + c^{(22)}y^{(2)} + \cdots + c^{(2n)}y^{(n)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ rx^{(n)} &= c^{(n1)}y^{(1)} + c^{(n2)}y^{(2)} + \cdots + c^{(nn)}y^{(n)}, \end{aligned}$$

bei der r eine positive ganze Zahl, die c ganze Zahlen bezeichnen mögen, in die Form:

$$Y = y^{(1)^2} + y^{(2)^2} + \cdots + y^{(n)^2}$$

übergehen, so müssen zwischen den Zahlen c, r die $\frac{1}{2}n(n+1)$ Relationen:

$$(o)\qquad c^{(1\sigma)}c^{(1\sigma')} + c^{(2\sigma)}c^{(2\sigma')} + \cdots + c^{(n\sigma)}c^{(n\sigma')} = \begin{cases} r^2, & \text{wenn } \sigma' = \sigma,\\ 0, & \text{wenn } \sigma' \gtrless \sigma, \end{cases} \qquad (\sigma, \sigma' = 1, 2, \ldots, n)$$

oder auch die damit äquivalenten:

$$(o')\qquad c^{(\varrho 1)}c^{(\varrho' 1)} + c^{(\varrho 2)}c^{(\varrho' 2)} + \cdots + c^{(\varrho n)}c^{(\varrho' n)} = \begin{cases} r^2, & \text{wenn } \varrho' = \varrho,\\ 0, & \text{wenn } \varrho' \gtrless \varrho, \end{cases} \qquad (\varrho, \varrho' = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen. Unter Anwendung der Relationen (o) erhält man dann ohne Mühe die Auflösung des Gleichungensystems (O) nach den Grössen y als Unbekannten in der Gestalt:

$$(O')\qquad \begin{aligned} ry^{(1)} &= c^{(11)}x^{(1)} + c^{(21)}x^{(2)} + \cdots + c^{(n1)}x^{(n)},\\ ry^{(2)} &= c^{(12)}x^{(1)} + c^{(22)}x^{(2)} + \cdots + c^{(n2)}x^{(n)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ ry^{(n)} &= c^{(1n)}x^{(1)} + c^{(2n)}x^{(2)} + \cdots + c^{(nn)}x^{(n)}. \end{aligned}$$

Die Gleichungensysteme (O), (O') mögen orthogonale genannt werden.

In diesem Abschnitte soll die Aufgabe behandelt werden, bei gegebenem r die c als ganze Zahlen so zu bestimmen, dass sie den Gleichungen (o), (o') genügen. Zunächst wird der Fall $r = 2$ erledigt werden. Die darauf bezügliche im nächsten Artikel folgende Untersuchung wird zeigen, dass es möglich ist, in diesem Falle alle

überhaupt existirenden Substitutionen (O) anzugeben; es wird sich zugleich aber auch ein allgemeines Princip ergeben, um für beliebiges r ebenso charakteristische Substitutionen (O) aufzustellen, wie die im Falle $r = 2$ erhaltenen es sind.

2.

Die Aufstellung der dem Falle $r = 2$ entsprechenden Substitutionen (O) erfordert die Lösung der folgenden Aufgabe. Es sollen die positive ganze Zahl n und die n^2 ganzen Zahlen c so bestimmt werden, dass für jedes σ und σ' von 1 bis n die Relationen:

$$(o) \qquad c^{(1\sigma)}c^{(1\sigma')} + c^{(2\sigma)}c^{(2\sigma')} + \cdots + c^{(n\sigma)}c^{(n\sigma')} = \begin{matrix} 4, & \text{wenn } \sigma' = \sigma, \\ 0, & \text{wenn } \sigma' \gtrless \sigma, \end{matrix}$$

oder, was dasselbe, für jedes ϱ und ϱ' von 1 bis n die Relationen:

$$(o') \qquad c^{(\varrho 1)}c^{(\varrho' 1)} + c^{(\varrho 2)}c^{(\varrho' 2)} + \cdots + c^{(\varrho n)}c^{(\varrho' n)} = \begin{matrix} 4, & \text{wenn } \varrho' = \varrho, \\ 0, & \text{wenn } \varrho' \gtrless \varrho, \end{matrix}$$

erfüllt sind. Man findet, dass zunächst eine Reihe von Systemen desselben Typus existirt, welche zu den Werthen $n = 4, 6, 8, 10, \ldots$ gehören. Denkt man sich die n^2 Grössen c in der durch das Gleichungensystem (O) bestimmten quadratischen Anordnung geschrieben und setzt der Einfachheit halber an Stelle der auftretenden Zahlen $+1$, -1 nur die Vorzeichen $+$, $-$ beziehlich, so werden die zu den Werthen $n = 4$, 6, 8 gehörigen Systeme durch die hier folgenden vorderen drei Schemata vollständig dargestellt, während das vierte Schema das einer beliebigen geraden Zahl $n = 2m$ entsprechende System versinnlicht, wenn man sich noch die in den fixirten Horizontalreihen offenen Plätze mit der Null besetzt denkt.

$n = 4$

+	+	+	−
+	+	−	+
+	−	+	+
−	+	+	+

$n = 6$

+	+	0	0	+	−
+	+	0	0	−	+
+	−	+	+	0	0
	+	+	+	0	0
0	0	+	−	+	+
0	0	−	+	+	+

$n = 8$

+	+	0	0	0	0	+	−
+	+	0	0	0	0	−	+
+	−	+	+	0	0	0	0
−	+	+	+	0	0	0	0
0	0	+	−	+	+	0	0
0	0	−	+	+	+	0	0
0	0	0	0	+	−	+	+
0	0	0	0	−	+	+	+

$n = 2m$

+	+										+	−
+	+										−	+
+	−	+	+									
−	+	+	+									
		+	−	+	+							
		−	+	+	+							
							+	−	+	+		
							−	+	+	+		
									+	−	+	+
									−	+	+	+

Ausser diesen regulären Systemen ergeben sich merkwürdiger Weise noch zwei isolirt stehende Systeme, von denen das eine zum Werthe $n = 7$, das andere zum Werthe $n = 8$ gehört, und die durch die Schemata:

$$
\begin{array}{|ccccccc|}
\hline
+ & + & + & + & 0 & 0 & 0 \\
+ & - & 0 & 0 & + & + & 0 \\
+ & 0 & - & 0 & - & 0 & + \\
+ & 0 & 0 & - & 0 & - & - \\
0 & + & - & 0 & 0 & + & - \\
0 & + & 0 & - & + & 0 & + \\
0 & 0 & + & - & - & + & 0 \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{|cccccccc|}
\hline
+ & + & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+ & - & 0 & 0 & + & + & 0 & 0 \\
+ & 0 & - & 0 & - & 0 & + & 0 \\
+ & 0 & 0 & - & 0 & - & - & 0 \\
0 & + & - & 0 & + & 0 & 0 & + \\
0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - \\
0 & 0 & + & - & 0 & 0 & + & + \\
0 & 0 & 0 & 0 & + & - & + & - \\
\hline
\end{array}
$$

repräsentirt werden. Betrachtet man zwei orthogonale Systeme, von denen das eine aus dem anderen dadurch hervorgeht, dass man seine Horizontalreihen oder seine Verticalreihen in irgend einer Weise umstellt, oder dadurch, dass man die sämmtlichen Elemente irgend welcher seiner Horizontalreihen oder irgend welcher seiner Verticalreihen mit -1 multiplicirt, als nicht verschieden und schliesst zerfallende*) Systeme aus, so sind mit den vorstehenden alle möglichen verschiedenen zur Zahl $r = 2$ gehörigen orthogonalen Systeme erschöpft.

3.

Dem durch das obige zur Zahl $n = 2m$ gehörige Schema repräsentirten Systeme der Grössen c entspricht das orthogonale Gleichungensystem:

$$
(O_{2m})\qquad
\begin{array}{rl}
2x^{(1)} = & y^{(1)} + y^{(2)} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + y^{(2m-1)} - y^{(2m)}, \\
2x^{(2)} = & y^{(1)} + y^{(2)} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - y^{(2m-1)} + y^{(2m)}, \\
2x^{(3)} = & y^{(1)} - y^{(2)} + y^{(3)} + y^{(4)}, \\
2x^{(4)} = & -y^{(1)} + y^{(2)} + y^{(3)} + y^{(4)}, \\
2x^{(5)} = & \qquad\qquad y^{(3)} - y^{(4)} + y^{(5)} + y^{(6)}, \\
2x^{(6)} = & \qquad\qquad -y^{(3)} + y^{(4)} + y^{(5)} + y^{(6)}, \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
2x^{(2m-3)} = & \qquad\qquad\qquad y^{(2m-5)} - y^{(2m-4)} + y^{(2m-3)} + y^{(2m-2)}, \\
2x^{(2m-2)} = & \qquad\qquad\qquad -y^{(2m-5)} + y^{(2m-4)} + y^{(2m-3)} + y^{(2m-2)}, \\
2x^{(2m-1)} = & \qquad\qquad\qquad\qquad y^{(2m-3)} - y^{(2m-2)} + y^{(2m-1)} + y^{(2m)}, \\
2x^{(2m)} = & \qquad\qquad\qquad\qquad -y^{(2m-3)} + y^{(2m-2)} + y^{(2m-1)} + y^{(2m)}.
\end{array}
$$

Um die wahre Natur dieses Gleichungensystems und damit zugleich die Möglichkeit seiner Verallgemeinerung für beliebiges r zu erkennen, setze man:

---

*) Vergl. pag. 9, Z. 2 v. u.

$$x^{(1)} = w^{(1)} + t^{(1)},\ x^{(3)} = w^{(2)} + t^{(2)},\ \ldots,\ x^{(2m-3)} = w^{(m-1)} + t^{(m-1)},\ x^{(2m-1)} = w^{(m)} + t^{(m)},$$
$$x^{(2)} = w^{(1)} - t^{(1)},\ x^{(4)} = w^{(2)} - t^{(2)},\ \ldots,\ x^{(2m-2)} = w^{(m-1)} - t^{(m-1)},\ x^{(2m)} \quad = w^{(m)} - t^{(m)};$$

es ergeben sich dann für die Grössen y die Werthe:

$$y^{(1)} = w^{(1)} + t^{(2)},\ y^{(3)} = w^{(2)} + t^{(3)},\ \ldots,\ y^{(2m-3)} = w^{(m-1)} + t^{(m)},\ y^{(2m-1)} = w^{(m)} + t^{(1)},$$
$$y^{(2)} = w^{(1)} - t^{(2)},\ y^{(4)} = w^{(2)} - t^{(3)},\ \ldots,\ y^{(2m-2)} = w^{(m-1)} - t^{(m)},\ y^{(2m)} \quad = w^{(m)} - t^{(1)},$$

und die Relation:

$$x^{(1)^2} + x^{(2)^2} + \cdots + x^{(n)^2} = y^{(1)^2} + y^{(2)^2} + \cdots + y^{(n)^2},$$

welche der Thatsache Ausdruck verleiht, dass das Gleichungensystem (O_{2m}) ein orthogonales ist, geht über in die identische Gleichung:

$$(J_{2m})\quad \left\{\begin{array}{l} (w^{(1)}+t^{(1)})^2+(w^{(2)}+t^{(2)})^2+\cdots+(w^{(m)}+t^{(m)})^2 \\ +(w^{(1)}-t^{(1)})^2+(w^{(2)}-t^{(2)})^2+\cdots+(w^{(m)}-t^{(m)})^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} (w^{(1)}+t^{(2)})^2+(w^{(2)}+t^{(3)})^2+\cdots+(w^{(m)}+t^{(1)})^2 \\ +(w^{(1)}-t^{(2)})^2+(w^{(2)}-t^{(3)})^2+\cdots+(w^{(m)}-t^{(1)})^2 \end{array}\right\}.$$

Von dieser Gleichung (J_{2m}) aus kann man aber auch rückwärts wieder zu dem Gleichungensysteme (O_{2m}) gelangen, wenn man für $\mu = 1, 2, \ldots, m$:

$$w^{(\mu)} + t^{(\mu)} = x^{(2\mu-1)}, \qquad w^{(\mu)} + t^{(\mu+1)} = y^{(2\mu-1)},$$
$$w^{(\mu)} - t^{(\mu)} = x^{(2\mu)}, \qquad w^{(\mu)} - t^{(\mu+1)} = y^{(2\mu)}$$

setzt, und dann, nachdem man noch $t^{(m+1)}$ durch $t^{(1)}$ ersetzt hat, durch Elimination der Grössen w und t die Grössen x durch die Grössen y ausdrückt. Man erkennt daraus, dass in der identischen Gleichung (J_{2m}) das Wesen des Gleichungensystems (O_{2m}) vollständig zum Ausdruck gebracht ist.

4.

Die für beliebiges r gewünschte Verallgemeinerung des Gleichungensystems (O_{2m}) macht jetzt, nachdem die sein Wesen charakterisirende identische Gleichung (J_{2m}) gewonnen ist, keine Schwierigkeit. Um zu ihr zu gelangen, hat man zunächst die Gleichung (J_{2m}) zu verallgemeinern.

Zu dem Ende verstehe man unter $w^{(\mu)}$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, m beliebige Grössen, unter $t^{(\mu 1)}, t^{(\mu 2)}, \ldots, t^{(\mu r)}$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, m Gruppen von je r Grössen, die nur den Bedingungen:

$$t^{(\mu 1)} + t^{(\mu 2)} + \cdots + t^{(\mu r)} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

zu genügen haben, und bezeichne ferner mit ϱ eine zweite Einheitswurzel, sodass also ϱ sowohl $+1$ als auch -1 sein kann. Die Gleichung:

$$(J_{rm})\quad \left\{\begin{array}{l} (w^{(1)}+t^{(11)})^2+(w^{(2)}+t^{(21)})^2+\cdots+(w^{(m)}+t^{(m1)})^2 \\ +(w^{(1)}+t^{(12)})^2+(w^{(2)}+t^{(22)})^2+\cdots+(w^{(m)}+t^{(m2)})^2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +(w^{(1)}+t^{(1r)})^2+(w^{(2)}+t^{(2r)})^2+\cdots+(w^{(m)}+t^{(mr)})^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} (w^{(1)}+t^{(21)})^2+(w^{(2)}+t^{(31)})^2+\cdots+(w^{(m)}+\varrho t^{(11)})^2 \\ +(w^{(1)}+t^{(22)})^2+(w^{(2)}+t^{(32)})^2+\cdots+(w^{(m)}+\varrho t^{(12)})^2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +(w^{(1)}+t^{(2r)})^2+(w^{(2)}+t^{(3r)})^2+\cdots+(w^{(m)}+\varrho t^{(1r)})^2 \end{array}\right\},$$

die unter den über die Grössen t gemachten Voraussetzungen eine identische ist, bildet dann die naturgemässe Verallgemeinerung der identischen Gleichung (J_{2m}), die als specieller, den Werthen $r = 2$, $\varrho = +1$ entsprechender Fall in ihr enthalten ist.

Setzt man nun entsprechend den m Verticalreihen der linken Seite:

$$u^{(1)} + t^{(11)} = x^{(1)}, \quad u^{(2)} + t^{(21)} = x^{(r+1)}, \ldots, u^{(m)} + t^{(m1)} = x^{(m-1)r+1},$$
$$u^{(1)} + t^{(12)} = x^{(2)}, \quad u^{(2)} + t^{(22)} = x^{(r+2)}, \ldots, u^{(m)} + t^{(m2)} = x^{(m-1)r+2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u^{(1)} + t^{(1r)} = x^{(r)}, \quad u^{(2)} + t^{(2r)} = x^{(2r)}, \ldots, u^{(m)} + t^{(mr)} = x^{(mr)},$$

und weiter entsprechend den m Verticalreihen der rechten Seite:

$$u^{(1)} + t^{(21)} = y^{(1)}, \quad u^{(2)} + t^{(31)} = y^{(r+1)}, \ldots, u^{(m)} + \varrho t^{(11)} = y^{(m-1)r+1},$$
$$u^{(1)} + t^{(22)} = y^{(2)}, \quad u^{(2)} + t^{(32)} = y^{(r+2)}, \ldots, u^{(m)} + \varrho t^{(12)} = y^{(m-1)r+2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u^{(1)} + t^{(2r)} = y^{(r)}, \quad u^{(2)} + t^{(3r)} = y^{(2r)}, \ldots, u^{(m)} + \varrho t^{(1r)} = y^{(mr)},$$

drückt alsdann aus der zweiten Gruppe von Gleichungen die Grössen u und t durch die Grössen y aus und führt die auf diese Weise für die Grössen u und t sich ergebenden homogenen linearen Functionen der y in die erste Gruppe von Gleichungen ein, so entsteht ein nur die Grössen x und y enthaltendes orthogonales Gleichungensystem (O_{rm}), welches die für beliebiges r gewünschte Verallgemeinerung des Gleichungensystems (O_{2m}) bildet.

Der Fall $m = 1$, der ein Ausnahmefall ist, soll zunächst behandelt werden. In diesem Falle erhält man, wenn $\varrho = +1$ ist, das orthogonale Gleichungensystem:

$$(O_{r1}^{+}) \qquad x^{(1)} = y^{(1)}, \; x^{(2)} = y^{(2)}, \ldots, x^{(r)} = y^{(r)},$$

das aber für das Folgende keine Beachtung verdient; wenn dagegen $\varrho = -1$ ist, das orthogonale Gleichungensystem:

$$(O_{r1}^{-}) \qquad \begin{aligned} rx^{(1)} &= (2-r)y^{(1)} + 2y^{(2)} + \cdots + 2y^{(r)}, \\ rx^{(2)} &= 2y^{(1)} + (2-r)y^{(2)} + \cdots + 2y^{(r)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ rx^{(r)} &= 2y^{(1)} + 2y^{(2)} + \cdots + (2-r)y^{(r)}. \end{aligned}$$

Nachdem so der Fall $m = 1$ erledigt ist, sei für das Folgende $m > 1$ vorausgesetzt. In diesem Falle ergibt sich aus (J_{rm}) das orthogonale Gleichungensystem:

$$
(O_{rm})\qquad
\begin{array}{l}
rx^{(1)} = y^{(1)} + y^{(2)} + \cdots + y^{(r)} + \varrho(r-1)y^{(\overline{m-1}r+1)} - \varrho\, y^{(\overline{m-1}r+2)} - \cdots - \varrho\, y^{(mr)},\\
rx^{(2)} = y^{(1)} + y^{(2)} + \cdots + y^{(r)} - \varrho\, y^{(\overline{m-1}r+1)} + \varrho(r-1)y^{(\overline{m-1}r+2)} - \cdots - \varrho\, y^{(mr)},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
rx^{(r)} = y^{(1)} + y^{(2)} + \cdots + y^{(r)} - \varrho\, y^{(\overline{m-1}r+1)} - \varrho\, y^{(\overline{m-1}r+2)} - \cdots + \varrho(r-1)y^{(mr)},\\
\hline
rx^{(r+1)} = (r-1)y^{(1)} - y^{(2)} - \cdots - y^{(r)} + y^{(r+1)} + y^{(r+2)} + \cdots + y^{(2r)},\\
rx^{(r+2)} = -y^{(1)} + (r-1)y^{(2)} - \cdots - y^{(r)} + y^{(r+1)} + y^{(r+2)} + \cdots + y^{(2r)},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
rx^{(2r)} = -y^{(1)} - y^{(2)} - \cdots + (r-1)y^{(r)} + y^{(r+1)} + y^{(r+2)} + \cdots + y^{(2r)},\\
\hline
rx^{(2r+1)} = (r-1)y^{(r+1)} - y^{(r+2)} - \cdots - y^{(2r)} + y^{(2r+1)} + y^{(2r+2)} + \cdots + y^{(3r)},\\
rx^{(2r+2)} = -y^{(r+1)} + (r-1)y^{(r+2)} - \cdots - y^{(2r)} + y^{(2r+1)} + y^{(2r+2)} + \cdots + y^{(3r)},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
rx^{(3r)} = -y^{(r+1)} - y^{(r+2)} - \cdots + (r-1)y^{(2r)} + y^{(2r+1)} + y^{(2r+2)} + \cdots + y^{(3r)},\\
\hline
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\hline
rx^{(\overline{m-1}r+1)} = (r-1)y^{(\overline{m-2}r+1)} - y^{(\overline{m-2}r+2)} - \cdots - y^{(\overline{m-1}r)} + y^{(\overline{m-1}r+1)} + y^{(\overline{m-1}r+2)} + \cdots + y^{(mr)},\\
rx^{(\overline{m-1}r+2)} = -y^{(\overline{m-2}r+1)} + (r-1)y^{(\overline{m-2}r+2)} - \cdots - y^{(\overline{m-1}r)} + y^{(\overline{m-1}r+1)} + y^{(\overline{m-1}r+2)} + \cdots + y^{(mr)},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
rx^{(mr)} = -y^{(\overline{m-2}r+1)} - y^{(\overline{m-2}r+2)} - \cdots + (r-1)y^{(\overline{m-1}r)} + y^{(\overline{m-1}r+1)} + y^{(\overline{m-1}r+2)} + \cdots + y^{(mr)}.
\end{array}
$$

Um den Bau des Systems (O_{rm}) besser übersehen zu können und zugleich die Analogie, welche zwischen seiner Bildung und der Bildung des im vorigen Artikel aufgestellten, dem Werthe $r = 2$ entsprechenden Systemes (O_{2m}) besteht, mehr hervortreten zu lassen, sollen schliesslich noch die auf den rechten Seiten von (O_{rm}) stehenden Coefficienten in ein quadratisches Schema eingeordnet werden. Zu dem Ende bezeichne man die drei folgenden, je r^2 Zahlen enthaltenden Complexe:

$$
\begin{array}{ccc}
+1\ \ +1 \cdots +1 & r-1\ \ -1 \cdots -1 & \varrho(r-1)\ \ -\varrho \cdots -\varrho\\
+1\ \ +1 \cdots +1 & -1\ \ r-1 \cdots -1 & -\varrho\ \ \varrho(r-1) \cdots -\varrho\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\
+1\ \ +1 \cdots +1 & -1\ \ -1 \cdots r-1 & -\varrho\ \ -\varrho \cdots \varrho(r-1)
\end{array}
$$

symbolisch mit:

$$
\mathrm{A} \qquad\qquad \mathrm{B} \qquad\qquad \varrho\mathrm{B},
$$

dann wird das System der auf den rechten Seiten der Gleichungen (O_{rm}) stehenden m^2r^2 Coefficienten durch das Schema:



repräsentirt, wenn man sich die in den fixirten Horizontalreihen noch offenen Plätze sämmtlich mit der Null besetzt denkt.

5.

Durch die Untersuchungen des vorigen Artikels sind unbegrenzt viele orthogonale Substitutionen gewonnen worden; eine derselben wird durch das Gleichungensystem (O_{r1}^-) geliefert, die übrigen erhält man, wenn man in (O_{rm}) der Zahl m der Reihe nach die Werthe 2, 3, 4, ... zulegt und dann zu jedem solchen Werthe von m das eine Mal $\varrho = +1$, das andere Mal $\varrho = -1$ setzt; die Substitutionen der ersten Art mögen von jetzt an mit (O_{rm}^+), $m = 2, 3, 4, \ldots$, die der zweiten Art mit (O_{rm}^-). $m = 2, 3, 4, \ldots$ bezeichnet werden. Alle diese Substitutionen lassen sich nun, wie zum Schlusse gezeigt werden soll, aus passend gewählten Substitutionen von der Form (O_{r1}^-), (O_{r2}^+) unter Hinzunahme identischer Substitutionen zusammensetzen.

Erweitert man nämlich die Substitution (O_{r1}^-), nachdem man vorher darin die Grössen:

$$x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(r)};\qquad y^{(1)},\ y^{(2)},\ \ldots,\ y^{(r)}$$

in neuer Bezeichnung durch die Grössen:

$$y^{(\overline{m-1}\,r+1)},\ y^{(\overline{m-1}\,r+2)},\ \ldots,\ y^{(mr)};\qquad z^{(\overline{m-1}\,r+1)},\ z^{(\overline{m-1}\,r+2)},\ \ldots,\ z^{(mr)}$$

ersetzt hat, durch Hinzunahme der $(m-1)r$ identischen Gleichungen:

$$ry^{(1)} = rz^{(1)},\quad ry^{(2)} = rz^{(2)},\ \ldots,\ ry^{(\overline{m-1}\,r)} = rz^{(\overline{m-1}\,r)}$$

zu einer der Zahl mr entsprechenden orthogonalen Substitution (O'_{rm}) und setzt die beiden Substitutionen (O_{rm}^+), (O'_{rm}) zusammen, indem man die auf den rechten Seiten von (O_{rm}^+) vorkommenden Grössen y durch die aus (O'_{rm}) dafür sich ergebenden linearen

Formen der z ersetzt, so entsteht eine neue orthogonale Substitution, welche, da es auf die Bezeichnung der Variablen nicht ankommt, mit (O^-_{rm}) identisch ist. Damit ist zunächst bewiesen, dass man für jedes m von der Substitution (O^+_{rm}) zu der Substitution (O^-_{rm}) gelangen kann, indem man die erstere unter Hinzunahme identischer Substitutionen mit einer Substitution (O^-_{r1}) zusammensetzt.

Erweitert man ferner die Substitution (O^+_{rm}) durch Hinzunahme der r identischen Gleichungen:

$$rx^{(mr+1)} = ry^{(mr+1)}, \quad rx^{(mr+2)} = ry^{(mr+2)}, \ldots, \quad rx^{(\overline{m+1}\,r)} = ry^{(\overline{m+1}\,r)}$$

zu einer der Zahl $(m+1)r$ entsprechenden orthogonalen Substitution $(O'_{r\,\overline{m+1}})$ und gleichzeitig die Substitution (O^+_{r2}), nachdem man darin zuvor die Grössen:

$$x^{(1)}, \quad x^{(2)}, \ldots, x^{(2r)}; \qquad y^{(1)}, \quad y^{(2)}, \ldots, y^{(2r)}$$

in neuer Bezeichnung durch die Grössen:

$$y^{(\overline{m-1}\,r+1)}, \quad y^{(\overline{m-1}\,r+2)}, \ldots, y^{(\overline{m+1}\,r)}; \qquad z^{(\overline{m-1}\,r+1)}, \quad z^{(\overline{m-1}\,r+2)}, \ldots, z^{(\overline{m+1}\,r)}$$

ersetzt hat, durch Hinzunahme der $(m-1)r$ identischen Gleichungen:

$$ry^{(1)} = rz^{(1)}, \quad ry^{(2)} = rz^{(2)}, \ldots, \quad ry^{(\overline{m-1}\,r)} = rz^{(\overline{m-1}\,r)}$$

gleichfalls zu einer der Zahl $(m+1)r$ entsprechenden orthogonalen Substitution $(O''_{r\,m+1})$ und setzt dann die beiden Substitutionen $(O'_{r\,\overline{m+1}})$, $(O''_{r\,\overline{m+1}})$ zusammen, so entsteht eine neue orthogonale Substitution, welche mit der Substitution $(O^+_{r\,m+1})$ identisch ist. Damit ist bewiesen, dass man von der einem beliebigen Werthe von m entsprechenden Substitution (O^+_{rm}) zu der dem Werthe $m+1$ entsprechenden Substitution $(O^+_{r\,\overline{m+1}})$ aufsteigen kann, indem man die erstere in passender Weise mit einer Substitution (O^+_{r2}) zusammensetzt.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich nun ohne Mühe das Endresultat, dass jede Substitution (O^+_{rm}), $m = 3, 4, \ldots$ durch Zusammensetzung von $m-1$ passend gewählten Substitutionen (O^+_{r2}), jede Substitution (O^-_{rm}), $m = 2, 3, 4, \ldots$ durch Zusammensetzung von $m-1$ passend gewählten Substitutionen (O^+_{r2}) und einer einzigen Substitution (O^-_{r1}), jedesmal unter Hinzunahme identischer Substitutionen erhalten werden kann; ein Resultat, das auch durch die Betrachtung der den genannten Substitutionen entsprechenden identischen Gleichungen (J_{rm}) hätte erhalten werden können.

— — —

Siebenter Abschnitt.

Aufstellung der Thetaformeln, welche den im vorigen Abschnitte gewonnenen orthogonalen Substitutionen entsprechen.

1.

Anknüpfend an die Untersuchungen des vorigen Abschnitts kann man das folgende Resultat aussprechen.

Sind $c^{(\varrho\sigma)}$, $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$, die n^2 Coefficienten eines orthogonalen Gleichungensystems, so geht die Form:

$$A = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \left(x_\mu^{(1)} x_{\mu'}^{(1)} + x_\mu^{(2)} x_{\mu'}^{(2)} + \cdots + x_\mu^{(n)} x_{\mu'}^{(n)}\right)$$

durch die Substitution:

$$(S) \qquad \left.\begin{aligned} r x_\mu^{(1)} &= c^{(11)} y_\mu^{(1)} + c^{(12)} y_\mu^{(2)} + \cdots + c^{(1n)} y_\mu^{(n)}, \\ r x_\mu^{(2)} &= c^{(21)} y_\mu^{(1)} + c^{(22)} y_\mu^{(2)} + \cdots + c^{(2n)} y_\mu^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r x_\mu^{(n)} &= c^{(n1)} y_\mu^{(1)} + c^{(n2)} y_\mu^{(2)} + \cdots + c^{(nn)} y_\mu^{(n)}, \end{aligned}\right\} (S_\mu)$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

über in die Form:

$$B = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \left(y_\mu^{(1)} y_{\mu'}^{(1)} + y_\mu^{(2)} y_{\mu'}^{(2)} + \cdots + y_\mu^{(n)} y_{\mu'}^{(n)}\right).$$

Unter der Voraussetzung, dass die Grössen $a_{\mu\mu'}$ den für Parameter von Thetafunctionen bestehenden Bedingungen genügen, soll jetzt diejenige Thetaformel, welche der Überführung der Form A in die Form B durch die Substitution (S) entspricht, aus der in Art. 1 des dritten Abschnitts aufgestellten Fundamentalformel (Θ) abgeleitet werden.

Zu dem Ende hat man die in der Formel (Θ) vorkommenden Grössen $a_{\mu\mu'}^{(1)}, \ldots, a_{\mu\mu'}^{(n)}, b_{\mu\mu'}^{(1)}, \ldots, b_{\mu\mu'}^{(n)}$ $(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$ in die Coefficienten der soeben aufgestellten Formen A, B und zugleich die der Formel (Θ) zu Grunde liegende allgemeine Sub-

stitution (S) in die hier vorliegende specielle Substitution (S) übergehen zu lassen. Man erhält dann die gewünschte Thetaformel*) in der Gestalt:

$$(\Theta) \qquad (r^n s)^p\, \vartheta(\!(u^{(1)})\!)\, \vartheta(\!(u^{(2)})\!) \dots \vartheta(\!(u^{(n)})\!)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\dots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(1)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(1)}}{r} \end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)\; \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(2)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(2)}}{r} \end{bmatrix}(\!(v^{(2)})\!) \dots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(n)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(n)}}{r} \end{bmatrix}(\!(v^{(n)})\!).$$

Die in dieser Formel vorkommenden Thetafunctionen besitzen alle die nämlichen Parameter $a_{\mu\mu'}$, und es sind dieselben daher nicht mehr in die Bezeichnung aufgenommen; die Grössen u, v sind mit einander verknüpft durch die beiden Gleichungensysteme:

$$\begin{aligned}
r v_\mu^{(1)} &= c^{(11)} u_\mu^{(1)} + c^{(21)} u_\mu^{(2)} + \dots + c^{(n1)} u_\mu^{(n)}, & r u_\mu^{(1)} &= c^{(11)} v_\mu^{(1)} + c^{(12)} v_\mu^{(2)} + \dots + c^{(1n)} v_\mu^{(n)},\\
r v_\mu^{(2)} &= c^{(12)} u_\mu^{(1)} + c^{(22)} u_\mu^{(2)} + \dots + c^{(n2)} u_\mu^{(n)}, & r u_\mu^{(2)} &= c^{(21)} v_\mu^{(1)} + c^{(22)} v_\mu^{(2)} + \dots + c^{(2n)} v_\mu^{(n)},\\
&\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\\
r v_\mu^{(n)} &= c^{(1n)} u_\mu^{(1)} + c^{(2n)} u_\mu^{(2)} + \dots + c^{(nn)} u_\mu^{(n)}, & r u_\mu^{(n)} &= c^{(n1)} v_\mu^{(1)} + c^{(n2)} v_\mu^{(2)} + \dots + c^{(nn)} v_\mu^{(n)},
\end{aligned}$$

$$\mu = 1, 2, \dots, p;$$

es ist weiter die auf der rechten Seite angedeutete Summation in der Weise auszuführen, dass man nach jedem der $2np$ in den linearen Formen:

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_\mu^{(1)} &= c^{(11)} \alpha_\mu^{(1)} + c^{(21)} \alpha_\mu^{(2)} + \dots + c^{(n1)} \alpha_\mu^{(n)}, & \bar{\beta}_\mu^{(1)} &= c^{(11)} \beta_\mu^{(1)} + c^{(21)} \beta_\mu^{(2)} + \dots + c^{(n1)} \beta_\mu^{(n)},\\
\bar{\alpha}_\mu^{(2)} &= c^{(12)} \alpha_\mu^{(1)} + c^{(22)} \alpha_\mu^{(2)} + \dots + c^{(n2)} \alpha_\mu^{(n)}, & \bar{\beta}_\mu^{(2)} &= c^{(12)} \beta_\mu^{(1)} + c^{(22)} \beta_\mu^{(2)} + \dots + c^{(n2)} \beta_\mu^{(n)},\\
&\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\\
\bar{\alpha}_\mu^{(n)} &= c^{(1n)} \alpha_\mu^{(1)} + c^{(2n)} \alpha_\mu^{(2)} + \dots + c^{(nn)} \alpha_\mu^{(n)}, & \bar{\beta}_\mu^{(n)} &= c^{(1n)} \beta_\mu^{(1)} + c^{(2n)} \beta_\mu^{(2)} + \dots + c^{(nn)} \beta_\mu^{(n)},
\end{aligned}$$

$$\mu = 1, 2, \dots, p,$$

vorkommenden α, β von 0 bis $r - 1$ summirt; es bezeichnet endlich s die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$\begin{aligned}
c^{(11)} x^{(1)} + c^{(21)} x^{(2)} + \dots + c^{(n1)} x^{(n)} &\equiv 0 \pmod{r},\\
c^{(12)} x^{(1)} + c^{(22)} x^{(2)} + \dots + c^{(n2)} x^{(n)} &\equiv 0 \pmod{r},\\
&\dots\dots\dots\\
c^{(1n)} x^{(1)} + c^{(2n)} x^{(2)} + \dots + c^{(nn)} x^{(n)} &\equiv 0 \pmod{r}.
\end{aligned}$$

Aus der gewonnenen Formel (Θ) erhält man durch passende Änderung der in ihr vorkommenden Variablen u, v die allgemeinere:

*) Prym, Ableitung einer allgemeinen Thetaformel. Formel (Θ) (Acta mathematica, Bd. 3, pag. 234).

$$(\Theta')\qquad \begin{aligned}&(r^n s)^p\,\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat\gamma^{(1)}+\hat\varrho^{(1)}}{r}+\varkappa^{(1)}\\[2mm] \dfrac{\hat\delta^{(1)}+\hat\sigma^{(1)}}{r}+\lambda^{(1)}\end{bmatrix}(\!(u^{(1)})\!)\dots\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat\gamma^{(n)}+\hat\varrho^{(n)}}{r}+\varkappa^{(n)}\\[2mm] \dfrac{\hat\delta^{(n)}+\hat\sigma^{(n)}}{r}+\lambda^{(n)}\end{bmatrix}(\!(u^{(n)})\!)\,e^{-\varphi}\\ &=\sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\dots,r-1}\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\bar\alpha^{(1)}+\bar\varkappa^{(1)}}{r}+\varrho^{(1)}\\[2mm] \dfrac{\bar\beta^{(1)}+\bar\lambda^{(1)}}{r}+\sigma^{(1)}\end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)\dots\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\bar\alpha^{(n)}+\bar\varkappa^{(n)}}{r}+\varrho^{(n)}\\[2mm] \dfrac{\bar\beta^{(n)}+\bar\lambda^{(n)}}{r}+\sigma^{(n)}\end{bmatrix}(\!(v^{(n)})\!)\,e^{-\psi}\\ &\qquad\times e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(\bar\alpha_\mu^{(\nu)}\delta_\mu^{(\nu)}-\bar\beta_\mu^{(\nu)}\gamma_\mu^{(\nu)}\right)},\end{aligned}$$

wobei:

$$\varphi=2\pi i\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\left(\frac{\hat\varrho_\mu^{(\nu)}}{r}+\varkappa_\mu^{(\nu)}\right)\frac{\hat\delta_\mu^{(\nu)}}{r},\qquad \psi=2\pi i\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\left(\frac{\bar\varkappa_\mu^{(\nu)}}{r}+\varrho_\mu^{(\nu)}\right)\frac{\bar\beta_\mu^{(\nu)}}{r}.$$

In dieser Formel bezeichnen $\varkappa_\mu^{(\nu)},\ \lambda_\mu^{(\nu)},\ \varrho_\mu^{(\nu)},\ \sigma_\mu^{(\nu)}\ \binom{\nu=1,2,\dots,n}{\mu=1,2,\dots,p}$ $4np$ beliebige reelle Grössen, $\gamma_\mu^{(\nu)},\ \delta_\mu^{(\nu)}\binom{\nu=1,2,\dots,n}{\mu=1,2,\dots,p}$ irgend $2np$ ganze Zahlen; unter $\bar\varkappa_\mu^{(\nu)},\ \bar\lambda_\mu^{(\nu)}\binom{\nu=1,2,\dots,n}{\mu=1,2,\dots,p}$ sind Grössen verstanden, die sich aus den $\varkappa$, λ in derselben Weise zusammensetzen, wie die Grössen $\bar\alpha$, $\bar\beta$ aus den α, β; die Grössen $\hat\varrho$, $\hat\sigma$ sind definirt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\hat\varrho_\mu^{(1)}&=c^{(11)}\varrho_\mu^{(1)}+c^{(12)}\varrho_\mu^{(2)}+\dots+c^{(1n)}\varrho_\mu^{(n)}, & \hat\sigma_\mu^{(1)}&=c^{(11)}\sigma_\mu^{(1)}+c^{(12)}\sigma_\mu^{(2)}+\dots+c^{(1n)}\sigma_\mu^{(n)},\\ \hat\varrho_\mu^{(2)}&=c^{(21)}\varrho_\mu^{(1)}+c^{(22)}\varrho_\mu^{(2)}+\dots+c^{(2n)}\varrho_\mu^{(n)}, & \hat\sigma_\mu^{(2)}&=c^{(21)}\sigma_\mu^{(1)}+c^{(22)}\sigma_\mu^{(2)}+\dots+c^{(2n)}\sigma_\mu^{(n)},\\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\\ \hat\varrho_\mu^{(n)}&=c^{(n1)}\varrho_\mu^{(1)}+c^{(n2)}\varrho_\mu^{(2)}+\dots+c^{(nn)}\varrho_\mu^{(n)}, & \hat\sigma_\mu^{(n)}&=c^{(n1)}\sigma_\mu^{(1)}+c^{(n2)}\sigma_\mu^{(2)}+\dots+c^{(nn)}\sigma_\mu^{(n)},\end{aligned}$$
$$\mu=1,2,\dots,p,$$

und unter $\hat\gamma_\mu^{(\nu)},\ \hat\delta_\mu^{(\nu)}\ \binom{\nu=1,2,\dots,n}{\mu=1,2,\dots,p}$ endlich sind Grössen verstanden, die sich aus den γ, δ in derselben Weise zusammensetzen wie die $\hat\varrho$, $\hat\sigma$ aus den ϱ, σ.

2.

Aus den im vorigen Artikel aufgestellten, dem allgemeinen orthogonalen Systeme (O) entsprechenden Formeln (Θ), (Θ') können jetzt die den speciellen orthogonalen Systemen (O_{r1}^-), (O_{rm}^+), (O_{rm}^-), $m=2,3,4,\dots$ entsprechenden Thetaformeln abgeleitet werden.

Lässt man aber zunächst die Coefficienten c des Systems (O) in die Coefficienten des Systems (O_{r1}^-) übergehen, so geht aus der Substitution (S) eine Substitution hervor, welche man auch aus der in Art. 1 des fünften Abschnitts aufgestellten Substitution (S) erhalten kann, wenn man darin $q^{(1)}=q^{(2)}=\dots=q^{(n)}=1$ setzt. Die dem Systeme (O_{r1}^-) entsprechende Thetaformel (Θ') ist daher keine andere als die

Formel $(\overline{\Theta}')$ des Art. 3 des fünften Abschnitts. Führt man darin an Stelle der willkürlichen Variablen u neue Variablen w, t ein, indem man für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$u_\mu^{(1)} = w_\mu + t_\mu^{(1)}, \quad u_\mu^{(2)} = w_\mu + t_\mu^{(2)}, \ \ldots, \quad u_\mu^{(r)} = w_\mu + t_\mu^{(r)}$$

setzt, wobei w_μ eine willkürlich veränderliche Grösse, $t_\mu^{(1)}, t_\mu^{(2)}, \ldots, t_\mu^{(r)}$ aber Veränderliche bezeichnen, welche der Bedingung:

$$t_\mu^{(1)} + t_\mu^{(2)} + \cdots + t_\mu^{(r)} = 0$$

genügen, so nimmt dieselbe die Gestalt:

$$(\Theta'_{\overline{r1}}) \quad \left(\frac{3+(-1)^r}{2}\right)^p r^p \left\{ \begin{array}{l} \vartheta\left[\frac{2\eta}{r} + \varkappa^{(1)}\right]\left(\!\left(w + t^{(1)}\right)\!\right) \\ \vartheta\left[\frac{2\eta}{r} + \varkappa^{(2)}\right]\left(\!\left(w + t^{(2)}\right)\!\right) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vartheta\left[\frac{2\eta}{r} + \varkappa^{(r)}\right]\left(\!\left(w + t^{(r)}\right)\!\right) \\ \times e^{-\frac{4\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\eta_\mu + \overline{\varkappa}_\mu)\eta'_\mu} \end{array} \right\} = \sum_{\left[\frac{\varepsilon}{r}\right]} \left\{ \begin{array}{l} \vartheta\left[\frac{2(\varepsilon+\overline{\varkappa})}{r} - \varkappa^{(1)}\right]\left(\!\left(w - t^{(1)}\right)\!\right) \\ \vartheta\left[\frac{2(\varepsilon+\overline{\varkappa})}{r} - \varkappa^{(2)}\right]\left(\!\left(w - t^{(2)}\right)\!\right) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vartheta\left[\frac{2(\varepsilon+\overline{\varkappa})}{r} - \varkappa^{(r)}\right]\left(\!\left(w - t^{(r)}\right)\!\right) \\ \times e^{-\frac{4\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu + \overline{\varkappa}_\mu)\varepsilon'_\mu} \end{array} \right\}$$

$$\times e^{\frac{4\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu \eta'_\mu - \varepsilon'_\mu \eta_\mu)}$$

an, wobei die rechts angedeutete Summation so auszuführen ist, dass $\left[\frac{\varepsilon}{r}\right]$ die Reihe der r^{2p} zur Zahl r gehörigen Normalcharakteristiken durchläuft.

Ist r eine ungerade Zahl, $r = 2r' - 1$, so kann man die Formel $(\Theta'_{\overline{r1}})$ in die Gestalt:

$$\underset{r=2r'-1}{(\Theta'_{\overline{r1}})} \quad r^p \left\{ \begin{array}{l} \vartheta\left[\frac{\eta}{r} + \varkappa^{(1)}\right]\left(\!\left(w + t^{(1)}\right)\!\right) \\ \vartheta\left[\frac{\eta}{r} + \varkappa^{(2)}\right]\left(\!\left(w + t^{(2)}\right)\!\right) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vartheta\left[\frac{\eta}{r} + \varkappa^{(r)}\right]\left(\!\left(w + t^{(r)}\right)\!\right) \\ \times e^{\frac{r-1}{r}\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\eta_\mu \eta'_\mu} \\ \times e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\overline{\varkappa}_\mu \eta'_\mu} \end{array} \right\} = \sum_{\left[\frac{\varepsilon}{r}\right]} \left\{ \begin{array}{l} \vartheta\left[\frac{\varepsilon+2\overline{\varkappa}}{r} - \varkappa^{(1)}\right]\left(\!\left(w - t^{(1)}\right)\!\right) \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon+2\overline{\varkappa}}{r} - \varkappa^{(2)}\right]\left(\!\left(w - t^{(2)}\right)\!\right) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon+2\overline{\varkappa}}{r} - \varkappa^{(r)}\right]\left(\!\left(w - t^{(r)}\right)\!\right) \\ \times e^{\frac{r-1}{r}\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu} \\ \times e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\overline{\varkappa}_\mu \varepsilon'_\mu} \end{array} \right\}$$

$$\times e^{-\frac{r-1}{r}\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu \eta'_\mu - \varepsilon'_\mu \eta_\mu)};$$

ist dagegen r eine gerade Zahl, $r = 2r'$, in die Gestalt:

$$
(\Theta'_{\overline{r1}})_{r=2r'} \qquad r'^{p}\left\{\begin{array}{l}
\vartheta\left[\frac{\eta}{r'}+\varkappa^{(1)}\right]((w+t^{(1)}))\\
\vartheta\left[\frac{\eta}{r'}+\varkappa^{(2)}\right]((w+t^{(2)}))\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
\vartheta\left[\frac{\eta}{r'}+\varkappa^{(2r')}\right]((w+t^{(2r')}))\\
\times\, e^{-\frac{2\pi i}{r'}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\eta_\mu+\bar\varkappa_\mu)\eta'_\mu}
\end{array}\right\}
=\sum_{\left[\frac{\varepsilon}{r'}\right]}\left\{\begin{array}{l}
\vartheta\left[\frac{\varepsilon+\bar\varkappa}{r'}-\varkappa^{(1)}\right]((w-t^{(1)}))\\
\vartheta\left[\frac{\varepsilon+\bar\varkappa}{r'}-\varkappa^{(2)}\right]((w-t^{(2)}))\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
\vartheta\left[\frac{\varepsilon+\bar\varkappa}{r'}-\varkappa^{(2r')}\right]((w-t^{(2r')}))\\
\times\, e^{-\frac{2\pi i}{r'}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu+\bar\varkappa_\mu)\varepsilon'_\mu}
\end{array}\right\}
\times\, e^{\frac{2\pi i}{r'}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\eta'_\mu-\varepsilon'_\mu\eta_\mu)}
$$

bringen, und es ist im ersten Falle die Summation in der Weise auszuführen, dass $\left[\frac{\varepsilon}{r}\right]$ die Reihe der r^{2p} zur Zahl r gehörigen Normalcharakteristiken, im zweiten Falle so, dass $\left[\frac{\varepsilon}{r'}\right]$ die Reihe der r'^{2p} zur Zahl r' gehörigen Normalcharakteristiken durchläuft. In einer jeden der drei vorstehenden Formeln sind unter η_μ, η'_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ irgend welche ganze Zahlen, unter $\varkappa^{(\nu)}_\mu$, $\varkappa'^{(\nu)}_\mu$ $\left(\begin{smallmatrix}\nu=1,2,\ldots,r\\ \mu=1,2,\ldots,p\end{smallmatrix}\right)$ irgend welche reelle Grössen zu verstehen, während die Grössen $\bar\varkappa_\mu$, $\bar\varkappa'_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ durch die Gleichungen:

$$
\bar\varkappa_\mu = \varkappa^{(1)}_\mu + \varkappa^{(2)}_\mu + \cdots + \varkappa^{(r)}_\mu, \qquad \bar\varkappa'_\mu = \varkappa'^{(1)}_\mu + \varkappa'^{(2)}_\mu + \cdots + \varkappa'^{(r)}_\mu
$$

definirt sind. Bei den Charakteristiken der Thetafunctionen ist, wie von jetzt an durchweg, die in Art. 4 des ersten Abschnitts besprochene kürzere Schreibweise angewandt.

3.

Lässt man weiter das der Substitution (S) des Art. 1 zu Grunde liegende allgemeine orthogonale System (O) in das in Art. 4 des sechsten Abschnitts aufgestellte System (O_{rm}) übergehen, so geht aus der Formel (Θ) die diesem Systeme entsprechende Thetaformel (Θ_{rm}) hervor. Man erhält dieselbe dadurch bei passender Wahl der Bezeichnung in der Gestalt:

$$
(\Theta_{rm}) \qquad N^{p}\left\{\begin{array}{l}
\vartheta((w^{(1)}+t^{(11)}))\,\vartheta((w^{(2)}+t^{(21)}))\cdots\vartheta((w^{(m)}+t^{(m1)}))\\
\vartheta((w^{(1)}+t^{(12)}))\,\vartheta((w^{(2)}+t^{(22)}))\cdots\vartheta((w^{(m)}+t^{(m2)}))\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
\vartheta((w^{(1)}+t^{(1r)}))\,\vartheta((w^{(2)}+t^{(2r)}))\cdots\vartheta((w^{(m)}+t^{(mr)}))
\end{array}\right\}
$$

$$
=\sum_{\left[\frac{\varepsilon}{r}\right]}\left\{\begin{array}{l}
\vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)}}{r}\right]((w^{(1)}+t^{(21)}))\,\vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(2)}-\varepsilon^{(3)}}{r}\right]((w^{(2)}+t^{(31)}))\cdots\vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(m)}-\varrho\,\varepsilon^{(1)}}{r}\right]((w^{(m)}+\varrho t^{(11)}))\\
\vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)}}{r}\right]((w^{(1)}+t^{(22)}))\,\vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(2)}-\varepsilon^{(3)}}{r}\right]((w^{(2)}+t^{(32)}))\cdots\vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(m)}-\varrho\,\varepsilon^{(1)}}{r}\right]((w^{(m)}+\varrho t^{(12)}))\\
\cdot\;\cdot\\
\vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)}}{r}\right]((w^{(1)}+t^{(2r)}))\,\vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(2)}-\varepsilon^{(3)}}{r}\right]((w^{(2)}+t^{(3r)}))\cdots\vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(m)}-\varrho\,\varepsilon^{(1)}}{r}\right]((w^{(m)}+\varrho t^{(1r)}))\\
\times\, e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left[(\varepsilon^{(1)}_\mu-\varepsilon^{(2)}_\mu)\varepsilon'^{(2)}_\mu+(\varepsilon^{(2)}_\mu-\varepsilon^{(3)}_\mu)\varepsilon'^{(3)}_\mu+\cdots+(\varepsilon^{(m)}_\mu-\varrho\,\varepsilon^{(1)}_\mu)\varrho\,\varepsilon'^{(1)}_\mu\right]}
\end{array}\right\},
$$

wobei zur Abkürzung:

$$\frac{3-\varrho^{r+1}}{2}\, r^{m+\frac{1+\varrho}{2}} = N$$

gesetzt ist. In dieser Formel bezeichnen die w unabhängige Veränderliche, die t dagegen Veränderliche, welche den Bedingungen:

$$t_\mu^{(\nu 1)} + t_\mu^{(\nu 2)} + \cdots + t_\mu^{(\nu r)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, m \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

genügen, und es ist die auf der rechten Seite angedeutete Summation in der Weise auszuführen, dass jede der m Charakteristiken $\left[\frac{\varepsilon^{(1)}}{r}\right], \cdots, \left[\frac{\varepsilon^{(m)}}{r}\right]$ unabhängig von den übrigen die Reihe der r^{2p} zur Zahl r gehörigen Normalcharakteristiken durchläuft.

Aus der gewonnenen Formel (Θ_{rm}) erhält man weiter durch passende Änderung der in ihr vorkommenden Variablen w, t die allgemeinere:

$$(\Theta'_{rm}) \qquad N^p \left\{ \begin{aligned} &\vartheta\left[\tfrac{\eta^{(1)}-\varrho\eta^{(m)}}{r}+\varkappa^{(11)}\right]\!(\!(w^{(1)}+t^{(11)})\!)\,\vartheta\left[\tfrac{\eta^{(2)}-\eta^{(1)}}{r}+\varkappa^{(21)}\right]\!(\!(w^{(2)}+t^{(21)})\!)\cdots\vartheta\left[\tfrac{\eta^{(m)}-\eta^{(m-1)}}{r}+\varkappa^{(m1)}\right]\!(\!(w^{(m)}+t^{(m1)})\!) \\ &\vartheta\left[\tfrac{\eta^{(1)}-\varrho\eta^{(m)}}{r}+\varkappa^{(12)}\right]\!(\!(w^{(1)}+t^{(12)})\!)\,\vartheta\left[\tfrac{\eta^{(2)}-\eta^{(1)}}{r}+\varkappa^{(22)}\right]\!(\!(w^{(2)}+t^{(22)})\!)\cdots\vartheta\left[\tfrac{\eta^{(m)}-\eta^{(m-1)}}{r}+\varkappa^{(m2)}\right]\!(\!(w^{(m)}+t^{(m2)})\!) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\vartheta\left[\tfrac{\eta^{(1)}-\varrho\eta^{(m)}}{r}+\varkappa^{(1r)}\right]\!(\!(w^{(1)}+t^{(1r)})\!)\,\vartheta\left[\tfrac{\eta^{(2)}-\eta^{(1)}}{r}+\varkappa^{(2r)}\right]\!(\!(w^{(2)}+t^{(2r)})\!)\cdots\vartheta\left[\tfrac{\eta^{(m)}-\eta^{(m-1)}}{r}+\varkappa^{(mr)}\right]\!(\!(w^{(m)}+t^{(mr)})\!) \\ &\times e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left[\left(\eta_\mu^{(1)}-\varrho\eta_\mu^{(m)}\right)\varrho\eta_\mu^{\prime(m)}+\left(\eta_\mu^{(2)}-\eta_\mu^{(1)}\right)\eta_\mu^{\prime(1)}+\cdots+\left(\eta_\mu^{(m)}-\eta_\mu^{(m-1)}\right)\eta_\mu^{\prime(m-1)}\right]} \\ &\times e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left[\left(\eta_\mu^{\prime(1)}-\varrho\eta_\mu^{\prime(m)}\right)\bar\varkappa_\mu^{(1)}+\left(\eta_\mu^{\prime(2)}-\eta_\mu^{\prime(1)}\right)\bar\varkappa_\mu^{(2)}+\cdots+\left(\eta_\mu^{\prime(m)}-\eta_\mu^{\prime(m-1)}\right)\bar\varkappa_\mu^{(m)}\right]} \end{aligned} \right\}$$

$$= \sum_{\left[\frac{\varepsilon}{r}\right]} \left\{ \begin{aligned} &\vartheta\left[\tfrac{\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)}}{r}+\tfrac{\bar\varkappa^{(1)}-\bar\varkappa^{(2)}}{r}+\varkappa^{(21)}\right]\!(\!(w^{(1)}+t^{(21)})\!)\cdots\vartheta\left[\tfrac{\varepsilon^{(m)}-\varrho\varepsilon^{(1)}}{r}+\tfrac{\bar\varkappa^{(m)}-\varrho\bar\varkappa^{(1)}}{r}+\varrho\varkappa^{(11)}\right]\!(\!(w^{(m)}+\varrho t^{(11)})\!) \\ &\vartheta\left[\tfrac{\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)}}{r}+\tfrac{\bar\varkappa^{(1)}-\bar\varkappa^{(2)}}{r}+\varkappa^{(22)}\right]\!(\!(w^{(1)}+t^{(22)})\!)\cdots\vartheta\left[\tfrac{\varepsilon^{(m)}-\varrho\varepsilon^{(1)}}{r}+\tfrac{\bar\varkappa^{(m)}-\varrho\bar\varkappa^{(1)}}{r}+\varrho\varkappa^{(12)}\right]\!(\!(w^{(m)}+\varrho t^{(12)})\!) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\vartheta\left[\tfrac{\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)}}{r}+\tfrac{\bar\varkappa^{(1)}-\bar\varkappa^{(2)}}{r}+\varkappa^{(2r)}\right]\!(\!(w^{(1)}+t^{(2r)})\!)\cdots\vartheta\left[\tfrac{\varepsilon^{(m)}-\varrho\varepsilon^{(1)}}{r}+\tfrac{\bar\varkappa^{(m)}-\varrho\bar\varkappa^{(1)}}{r}+\varrho\varkappa^{(1r)}\right]\!(\!(w^{(m)}+\varrho t^{(1r)})\!) \\ &\times e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left[\left(\varepsilon_\mu^{(1)}-\varepsilon_\mu^{(2)}\right)\varepsilon_\mu^{\prime(2)}+\left(\varepsilon_\mu^{(2)}-\varepsilon_\mu^{(3)}\right)\varepsilon_\mu^{\prime(3)}+\cdots+\left(\varepsilon_\mu^{(m)}-\varrho\varepsilon_\mu^{(1)}\right)\varrho\varepsilon_\mu^{\prime(1)}\right]} \\ &\times e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left[\left(\varepsilon_\mu^{\prime(1)}-\varepsilon_\mu^{\prime(2)}\right)\bar\varkappa_\mu^{(1)}+\left(\varepsilon_\mu^{\prime(2)}-\varepsilon_\mu^{\prime(3)}\right)\bar\varkappa_\mu^{(2)}+\cdots+\left(\varepsilon_\mu^{\prime(m)}-\varrho\varepsilon_\mu^{\prime(1)}\right)\bar\varkappa_\mu^{(m)}\right]} \end{aligned} \right\}$$

$$\times e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left[\left(\varepsilon_\mu^{(1)}-\varepsilon_\mu^{(2)}\right)\eta_\mu^{\prime(1)}-\left(\varepsilon_\mu^{\prime(1)}-\varepsilon_\mu^{\prime(2)}\right)\eta_\mu^{(1)}+\cdots+\left(\varepsilon_\mu^{(m)}-\varrho\varepsilon_\mu^{(1)}\right)\eta_\mu^{\prime(m)}-\left(\varepsilon_\mu^{\prime(m)}-\varrho\varepsilon_\mu^{\prime(1)}\right)\eta_\mu^{(m)}\right]},$$

bei der $\eta_\mu^{(\nu)}$, $\eta_\mu^{\prime(\nu)}$ $\begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, m \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$ irgend $2mp$ ganze Zahlen, $\varkappa_\mu^{(\nu 1)}, \ldots, \varkappa_\mu^{(\nu r)}$, $\varkappa_\mu^{\prime(\nu 1)}, \ldots, \varkappa_\mu^{\prime(\nu r)}$ $\begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, m \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$ $2mrp$ beliebige reelle Grössen bezeichnen, während die Grössen $\bar\varkappa_\mu^{(\nu)}$, $\bar\varkappa_\mu^{\prime(\nu)}$ $\begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, m \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$ durch die Gleichungen:

$$\varkappa_\mu^{(\nu)} = \varkappa_\mu^{(\nu 1)} + \varkappa_\mu^{(\nu 2)} + \cdots + \varkappa_\mu^{(\nu r)}, \qquad \bar\varkappa_\mu^{\prime(\nu)} = \varkappa_\mu^{\prime(\nu 1)} + \varkappa_\mu^{\prime(\nu 2)} + \cdots + \varkappa_\mu^{\prime(\nu r)}$$

definirt sind.

4.

In Art. 5 des sechsten Abschnitts ist gezeigt worden, dass man alle Substitutionen (O_{rm}) aus passend gewählten Substitutionen von der Gestalt (O_{r1}^{-}), (O_{r2}^{+}) unter Hinzunahme identischer Substitutionen zusammensetzen kann. Verbindet man dieses Resultat mit dem in Art. 3 des dritten Abschnitts gewonnenen, so erscheinen die den Systemen (O_{r1}^{-}), (O_{r2}^{+}) entsprechenden Formeln $(\Theta_{r1}^{'-})$, $(\Theta_{r2}^{'+})$ als die Grundlagen für das ganze System der Thetaformeln (Θ_{rm}), in dem Sinne, dass aus Formeln dieser Art durch rationale Verbindung die sämmtlichen Formeln (Θ_{rm}^{+}), (Θ_{rm}^{-}), $m=2,3,4,\ldots$ erhalten werden können.

Die Formel $(\Theta_{r1}^{'-})$ ist schon in Art. 2 aufgestellt worden; die Formel $(\Theta_{r2}^{'+})$ soll jetzt in der einfachsten Gestalt aufgestellt werden. Zu dem Ende setze man in der Formel (Θ_{rm}') $m=2$, $\varrho=+1$; man erhält dann, wenn man noch die Bezeichnung in passender Weise einrichtet und einige leicht ersichtliche Vereinfachungen vornimmt, die gewünschte Formel in der Gestalt:

$$(\Theta_{r2}^{'+})\qquad r^{p}\left\{\begin{array}{l}
\vartheta\left[\frac{\eta}{r}+\varkappa^{(11)}\right]\!\left(\!\left(w^{(1)}+t^{(11)}\right)\!\right)\vartheta\left[\frac{\eta}{r}+\varkappa^{(21)}\right]\!\left(\!\left(w^{(2)}+t^{(21)}\right)\!\right)\\
\vartheta\left[\frac{\eta}{r}+\varkappa^{(12)}\right]\!\left(\!\left(w^{(1)}+t^{(12)}\right)\!\right)\vartheta\left[\frac{\eta}{r}+\varkappa^{(22)}\right]\!\left(\!\left(w^{(2)}+t^{(22)}\right)\!\right)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\vartheta\left[\frac{\eta}{r}+\varkappa^{(1r)}\right]\!\left(\!\left(w^{(1)}+t^{(1r)}\right)\!\right)\vartheta\left[\frac{\eta}{r}+\varkappa^{(2r)}\right]\!\left(\!\left(w^{(2)}+t^{(2r)}\right)\!\right)\\
\qquad\times e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\eta_{\mu}\eta'_{\mu}}\times e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\bar{\varkappa}_{\mu}\eta'_{\mu}}
\end{array}\right\}$$

$$=\sum_{\left[\frac{\varepsilon}{r}\right]}\left\{\begin{array}{l}
\vartheta\left[\frac{\varepsilon+\bar{\varkappa}}{r}-\varkappa^{(21)}\right]\!\left(\!\left(w^{(1)}-t^{(21)}\right)\!\right)\vartheta\left[\frac{\varepsilon+\bar{\varkappa}}{r}-\varkappa^{(11)}\right]\!\left(\!\left(w^{(2)}-t^{(11)}\right)\!\right)\\
\vartheta\left[\frac{\varepsilon+\bar{\varkappa}}{r}-\varkappa^{(22)}\right]\!\left(\!\left(w^{(1)}-t^{(22)}\right)\!\right)\vartheta\left[\frac{\varepsilon+\bar{\varkappa}}{r}-\varkappa^{(12)}\right]\!\left(\!\left(w^{(2)}-t^{(12)}\right)\!\right)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\vartheta\left[\frac{\varepsilon+\bar{\varkappa}}{r}-\varkappa^{(2r)}\right]\!\left(\!\left(w^{(1)}-t^{(2r)}\right)\!\right)\vartheta\left[\frac{\varepsilon+\bar{\varkappa}}{r}-\varkappa^{(1r)}\right]\!\left(\!\left(w^{(2)}-t^{(1r)}\right)\!\right)\\
\qquad\times e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_{\mu}\varepsilon'_{\mu}}\times e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\bar{\varkappa}_{\mu}\varepsilon'_{\mu}}
\end{array}\right\}$$

$$\times e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_{\mu}\eta'_{\mu}-\varepsilon'_{\mu}\eta_{\mu})}.$$

Dabei bezeichnen die $2p$ Buchstaben w unabhängige Veränderliche, die t dagegen Veränderliche, welche den Bedingungen:

$$t_{\mu}^{(11)}+t_{\mu}^{(12)}+\cdots+t_{\mu}^{(1r)}=0,\qquad t_{\mu}^{(21)}+t_{\mu}^{(22)}+\cdots+t_{\mu}^{(2r)}=0\qquad(\mu=1,2,\ldots,p)$$

genügen; η_{μ}, η'_{μ} $(\mu=1,2,\ldots,p)$ bezeichnen irgend $2p$ ganze Zahlen, $\varkappa_{\mu}^{(\nu1)}$, $\varkappa_{\mu}^{(\nu2)}$, $\ldots$ $\varkappa_{\mu}^{(\nu r)}$, $\varkappa_{\mu}^{'(\nu1)}$, $\varkappa_{\mu}^{'(\nu2)}$, $\ldots$ $\varkappa_{\mu}^{'(\nu r)}$ $\binom{\nu=1,2}{\mu=1,2,\ldots,p}$ $4rp$ beliebige reelle Grössen, aus denen sich die $\bar{\varkappa}$, $\bar{\varkappa}'$ zusammensetzen gemäss den Gleichungen:

$$\bar{\varkappa}_\mu = \varkappa_\mu^{(11)} + \varkappa_\mu^{(12)} + \cdots + \varkappa_\mu^{(1r)} + \varkappa_\mu^{(21)} + \varkappa_\mu^{(22)} + \cdots + \varkappa_\mu^{(2r)},$$
$$\bar{\varkappa}'_\mu = \varkappa_\mu^{'(11)} + \varkappa_\mu^{'(12)} + \cdots + \varkappa_\mu^{'(1r)} + \varkappa_\mu^{'(21)} + \varkappa_\mu^{'(22)} + \cdots + \varkappa_\mu^{'(2r)}; \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

die Summation endlich ist in der Weise auszuführen, dass die Charakteristik $\left[\frac{\varepsilon}{r}\right]$ die Reihe der r^{2p} zur Zahl r gehörigen Normalcharakteristiken durchläuft.

Mit Rücksicht auf die hier aufgestellte Formel (Θ'^{+}_{r2}) kann man endlich noch bemerken, dass sie nicht wesentlich verschieden ist von jener Formel, welche aus der in Art. 2 aufgestellten Formel $(\Theta'^{-}_{r1})_{r=2r'}$ hervorgeht, wenn man darin r' durch r oder, was dasselbe, r in neuer Bezeichnung durch $2r$ ersetzt.

Achter Abschnitt.

Einige Anwendungen der im vorigen Abschnitte aufgestellten Thetaformeln.

1.

Um die Bedeutung der im vorigen Abschnitte aufgestellten Thetaformeln zu zeigen, sollen jetzt von den zahlreichen Anwendungen, welche sie gestatten, einige besonders wichtige mitgetheilt werden.

Man verstehe unter v_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, p$, unabhängige Veränderliche, unter c_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, p$, willkürlich wählbare Constanten, unter $a_\mu^{(\nu)}$, ${}_{\mu = 1, 2, \ldots, p}^{\nu = 0, 1, 2, \ldots, m}$, aber Constanten, welche den p Bedingungen:

$$a_\mu^{(1)} + a_\mu^{(2)} + \cdots + a_\mu^{(m)} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

genügen, und führe in die Formel (Θ_{rm}), nachdem man darin $\varrho = +1$ gesetzt hat, diese Grössen v, c, a an Stelle der Grössen w, t ein, indem man für ${}_{\mu = 1, 2, \ldots, p}^{\nu = 1, 2, \ldots, m}$:

$$r w_\mu^{(\nu)} = v_\mu + r s_\mu^{(\nu)} + (r-2) c_\mu,$$

$$r t_\mu^{(\nu 1)} = r t_\mu^{(\nu 2)} = \cdots = r t_\mu^{(\nu r-2)} = -v_\mu - r s_\mu^{(\nu-1)} + 2 c_\mu,$$

$$r t_\mu^{(\nu r-1)} = -v_\mu + r(r-1) s_\mu^{(\nu-1)} - (r-2) c_\mu, \qquad r t_\mu^{(\nu r)} = (r-1) v_\mu - r s_\mu^{(\nu-1)} - (r-2) c_\mu$$

setzt, wobei:

$$s_\mu^{(\nu)} = a_\mu^{(0)} + a_\mu^{(1)} + \cdots + a_\mu^{(\nu)}$$

ist. Aus der Formel (Θ_{rm}) geht dann die Formel:

$$r^{(m+1)p} \left\{ \begin{matrix} \vartheta^{r-2}(\!(c + a^{(1)})\!) \; \vartheta^{r-2}(\!(c + a^{(2)})\!) \ldots \vartheta^{r-2}(\!(c + a^{(m)})\!) \\ \vartheta\,(\!(r s^{(0)} + a^{(1)})\!) \; \vartheta\,(\!(r s^{(1)} + a^{(2)})\!) \ldots \vartheta\,(\!(r s^{(m-1)} + a^{(m)})\!) \\ \vartheta\,(\!(v + a^{(1)})\!) \; \vartheta\,(\!(v + a^{(2)})\!) \ldots \vartheta\,(\!(v + a^{(m)})\!) \end{matrix} \right\}$$

$$\text{(F)} \quad = \sum_{\left[\frac{\varepsilon}{r}\right]} \left\{ \begin{matrix} \vartheta^{r-2}\left[\frac{\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}}{r}\right](\!(c)\!) \; \vartheta^{r-2}\left[\frac{\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(3)}}{r}\right](\!(c)\!) \ldots \vartheta^{r-2}\left[\frac{\varepsilon^{(m)} - \varepsilon^{(1)}}{r}\right](\!(c)\!) \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}}{r}\right](\!(r s^{(1)})\!) \; \vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(3)}}{r}\right](\!(r s^{(2)})\!) \ldots \vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(m)} - \varepsilon^{(1)}}{r}\right](\!(r s^{(m)})\!) \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}}{r}\right](\!(v)\!) \; \vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(3)}}{r}\right](\!(v)\!) \ldots \vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(m)} - \varepsilon^{(1)}}{r}\right](\!(v)\!) \\ \times e^{\frac{2\pi i}{r} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \left[(\varepsilon_\mu^{(1)} - \varepsilon_\mu^{(2)}) \varepsilon_\mu'^{(2)} + (\varepsilon_\mu^{(2)} - \varepsilon_\mu^{(3)}) \varepsilon_\mu'^{(3)} + \cdots + (\varepsilon_\mu^{(m)} - \varepsilon_\mu^{(1)}) \varepsilon_\mu'^{(1)} \right]} \end{matrix} \right\}$$

hervor, vermittelst welcher jedes Thetaproduct von der Form:

$$\vartheta(\!(v + a^{(1)})\!)\,\vartheta(\!(v + a^{(2)})\!) \ldots \vartheta(\!(v + a^{(m)})\!),$$

bei dem die Constanten a den p Bedingungen:

$$a_\mu^{(1)} + a_\mu^{(2)} + \cdots + a_\mu^{(m)} = 0 \qquad {\scriptstyle (\mu = 1, 2, \ldots, p)}$$

genügen, durch die r^{2p} zur Zahl r gehörigen Normalfunctionen $\vartheta\left[\frac{\varepsilon}{r}\right](\!(v)\!)$ ausgedrückt werden kann.

In der gewonnenen Formel (F) sollen weiter für die Constanten c, a m^{te} Theile der Periodicitätsmodulen eingeführt werden. Zu dem Ende verstehe man unter $\varkappa_\mu$, $\varkappa'_\mu$, $\alpha_\mu^{(\nu)}$, $\alpha_\mu^{'(\nu)}$ $\left({\nu = 0, 1, 2, \ldots, m \atop \mu = 1, 2, \ldots, p}\right)$ ganze Zahlen, welche den $2p$ Bedingungen:

$$\alpha_\mu^{(1)} + \alpha_\mu^{(2)} + \cdots + \alpha_\mu^{(m)} = 0, \qquad \alpha_\mu^{'(1)} + \alpha_\mu^{'(2)} + \cdots + \alpha_\mu^{'(m)} = 0 \qquad {\scriptstyle (\mu = 1, 2, \ldots, p)}$$

genügen, und setze für ${\nu = 0, 1, 2, \ldots, m \atop \mu = 1, 2, \ldots, p}$:

$$c_\mu = \frac{\varkappa'_\mu}{m}\pi i + \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \frac{\varkappa_{\mu'}}{m} a_{\mu\mu'}, \qquad a_\mu^{(\nu)} = \frac{\alpha_\mu^{'(\nu)}}{m}\pi i + \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \frac{\alpha_{\mu'}^{(\nu)}}{m} a_{\mu\mu'}.$$

Unter Anwendung der Hülfsformel (A) pag. 7 geht dann, wenn man noch zur Abkürzung für ${\nu = 0, 1, 2, \ldots, m \atop \mu = 1, 2, \ldots, p}$:

$$\alpha_\mu^{(0)} + \alpha_\mu^{(1)} + \cdots + \alpha_\mu^{(\nu)} = \sigma_\mu^{(\nu)}, \qquad \alpha_\mu^{'(0)} + \alpha_\mu^{'(1)} + \cdots + \alpha_\mu^{'(\nu)} = \sigma_\mu^{'(\nu)}$$

setzt, aus der Formel (F) die Formel:

$$(F')\quad r^{(m+1)p} \left\{ \begin{matrix} \vartheta^{r-2}\left[\frac{\varkappa + \alpha^{(1)}}{m}\right](\!(0)\!) & \vartheta^{r-2}\left[\frac{\varkappa + \alpha^{(2)}}{m}\right](\!(0)\!) & \ldots\,\vartheta^{r-2}\left[\frac{\varkappa + \alpha^{(m)}}{m}\right](\!(0)\!) \\ \vartheta\left[\frac{r\sigma^{(0)} + \alpha^{(1)}}{m}\right](\!(0)\!) & \vartheta\left[\frac{r\sigma^{(1)} + \alpha^{(2)}}{m}\right](\!(0)\!) \ldots & \vartheta\left[\frac{r\sigma^{(m-1)} + \alpha^{(m)}}{m}\right](\!(0)\!) \\ \vartheta\left[\frac{\alpha^{(1)}}{m}\right](\!(v)\!) & \vartheta\left[\frac{\alpha^{(2)}}{m}\right](\!(v)\!) & \ldots\,\vartheta\left[\frac{\alpha^{(m)}}{m}\right](\!(v)\!) \end{matrix} \right\}$$

$$= \sum_{\left[\frac{\varepsilon}{r}\right]} \left\{ \begin{matrix} \vartheta^{r-2}\left[\frac{\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}}{r} + \frac{\varkappa}{m}\right](\!(0)\!) & \vartheta^{r-2}\left[\frac{\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(3)}}{r} + \frac{\varkappa}{m}\right](\!(0)\!) & \ldots\,\vartheta^{r-2}\left[\frac{\varepsilon^{(m)} - \varepsilon^{(1)}}{r} + \frac{\varkappa}{m}\right](\!(0)\!) \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}}{r} + \frac{r\sigma^{(1)}}{m}\right](\!(0)\!) & \vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(3)}}{r} + \frac{r\sigma^{(2)}}{m}\right](\!(0)\!) \ldots & \vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(m)} - \varepsilon^{(1)}}{r} + \frac{r\sigma^{(m)}}{m}\right](\!(0)\!) \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}}{r}\right](\!(v)\!) & \vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(3)}}{r}\right](\!(v)\!) & \ldots\,\vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(m)} - \varepsilon^{(1)}}{r}\right](\!(v)\!) \\ \multicolumn{3}{c}{\times\, e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left[\left(\varepsilon_\mu^{(1)} - \varepsilon_\mu^{(2)}\right)\varepsilon_\mu^{'(2)} + \left(\varepsilon_\mu^{(2)} - \varepsilon_\mu^{(3)}\right)\varepsilon_\mu^{'(3)} + \cdots + \left(\varepsilon_\mu^{(m)} - \varepsilon_\mu^{(1)}\right)\varepsilon_\mu^{'(1)}\right]}} \end{matrix} \right\}$$

$$\times\, e^{-\frac{2\pi i}{m}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left[\sigma_\mu^{(1)}\left(\varepsilon_\mu^{'(1)} - \varepsilon_\mu^{'(2)}\right) + \sigma_\mu^{(2)}\left(\varepsilon_\mu^{'(2)} - \varepsilon_\mu^{'(3)}\right) + \cdots + \sigma_\mu^{(m)}\left(\varepsilon_\mu^{'(m)} - \varepsilon_\mu^{'(1)}\right)\right]}$$

hervor, vermittelst welcher das Product:

$$\vartheta\left[\begin{matrix}\alpha^{(1)}\\ m\end{matrix}\right]((v))\ \vartheta\left[\begin{matrix}\alpha^{(2)}\\ m\end{matrix}\right]((v)) \dots \vartheta\left[\begin{matrix}\alpha^{(m)}\\ m\end{matrix}\right]((v))$$

von zur Zahl m gehörigen Thetafunctionen durch die zu einer beliebig gewählten Zahl r gehörigen Thetafunctionen ausgedrückt werden kann.

Setzt man für $\mu = 1, 2, \dots, p$:

$$\alpha_\mu^{(1)} = \alpha_\mu^{(2)} = \cdots = \alpha_\mu^{(m-1)} = \alpha_\mu, \qquad \alpha_\mu^{\prime(1)} = \alpha_\mu^{\prime(2)} = \cdots = \alpha_\mu^{\prime(m-1)} = \alpha'_\mu,$$
$$\alpha_\mu^{(m)} = (1-m)\,\alpha_\mu, \qquad \alpha_\mu^{\prime(m)} = (1-m)\,\alpha'_\mu,$$

so geht das genannte Thetaproduct, von einer Exponentialgrösse abgesehen, in $\vartheta^m\left[\begin{matrix}\alpha\\ m\end{matrix}\right]((v))$ über.

2.

Es soll endlich gezeigt werden, dass die zu irgend einer Zahl r gehörigen Thetaquotienten Additionstheoreme von der Beschaffenheit besitzen, dass die dem Argumentensysteme $(w+t)$ entsprechenden Werthe dieser Quotienten sich rational durch die den Argumentensystemen (w) und (t) entsprechenden Werthe ausdrücken lassen, und dass dabei als Constanten, von r^{ten} Einheitswurzeln abgesehen, nur die den Argumentensystemen (0) entsprechenden Werthe dieser Quotienten auftreten.

Um diese Additionstheoreme zu erhalten, setze man in der Formel (Θ'^{+}_{r2}) pag. 53 für $\mu = 1, 2, \dots, p$:

$$w_\mu^{(1)} = u_\mu, \quad t_\mu^{(11)} = v_\mu, \quad t_\mu^{(12)} = -v_\mu, \quad t_\mu^{(13)} = t_\mu^{(14)} = \cdots = t_\mu^{(1r)} = 0,$$
$$w_\mu^{(2)} = 0, \quad t_\mu^{(21)} = t_\mu^{(22)} = \cdots = t_\mu^{(2r)} = 0,$$
$$\eta_\mu = 0, \quad \eta'_\mu = 0,$$

ferner ein Mal:

$$\varkappa_\mu^{(11)} = \frac{\alpha_\mu^{(11)}}{r}, \dots, \varkappa_\mu^{(1r)} = \frac{\alpha_\mu^{(1r)}}{r}, \quad \varkappa_\mu^{(21)} = \frac{\alpha_\mu^{(21)}}{r}, \dots, \varkappa_\mu^{(2r)} = \frac{\alpha_\mu^{(2r)}}{r},$$
$$\varkappa_\mu^{\prime(11)} = \frac{\alpha_\mu^{\prime(11)}}{r}, \dots, \varkappa_\mu^{\prime(1r)} = \frac{\alpha_\mu^{\prime(1r)}}{r}, \quad \varkappa_\mu^{\prime(21)} = \frac{\alpha_\mu^{\prime(21)}}{r}, \dots, \varkappa_\mu^{\prime(2r)} = \frac{\alpha_\mu^{\prime(2r)}}{r},$$

indem man unter den α, α' ganze Zahlen versteht, welche den $2p$ Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_\mu^{(11)} + \cdots + \alpha_\mu^{(1r)} + \alpha_\mu^{(21)} + \cdots + \alpha_\mu^{(2r)} = 0,\\ \alpha_\mu^{\prime(11)} + \cdots + \alpha_\mu^{\prime(1r)} + \alpha_\mu^{\prime(21)} + \cdots + \alpha_\mu^{\prime(2r)} = 0\end{aligned}\right\} \quad (\mu = 1, 2, \dots, p)$$

genügen, ein ander Mal:

$$\varkappa_\mu^{(11)} = \frac{\beta_\mu^{(11)}}{r}, \dots, \varkappa_\mu^{(1r)} = \frac{\beta_\mu^{(1r)}}{r}, \quad \varkappa_\mu^{(21)} = \frac{\beta_\mu^{(21)}}{r}, \dots, \varkappa_\mu^{(2r)} = \frac{\beta_\mu^{(2r)}}{r},$$
$$\varkappa_\mu^{\prime(11)} = \frac{\beta_\mu^{\prime(11)}}{r}, \dots, \varkappa_\mu^{\prime(1r)} = \frac{\beta_\mu^{\prime(1r)}}{r}, \quad \varkappa_\mu^{\prime(21)} = \frac{\beta_\mu^{\prime(21)}}{r}, \dots, \varkappa_\mu^{(2r)} = \frac{\beta_\mu^{\prime(2r)}}{r},$$

indem man unter den β, β' gleichfalls ganze Zahlen versteht, welche den $2p$ Bedingungen:

$$\begin{aligned} \beta_\mu^{(11)} + \cdots + \beta_\mu^{(1r)} + \beta_\mu^{(21)} + \cdots + \beta_\mu^{(2r)} = 0, \\ \beta_\mu'^{(11)} + \cdots + \beta_\mu'^{(1r)} + \beta_\mu'^{(21)} + \cdots + \beta_\mu'^{(2r)} = 0 \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

genügen, und setze noch voraus, dass für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\alpha_\mu^{(12)} = \beta_\mu^{(12)}$$

sei. Dividirt man dann die beiden auf die angegebene Weise aus (Θ'^{+}_{r2}) hervorgehenden Formeln durcheinander, so erhält man das gewünschte Additionstheorem der zur Zahl r gehörigen Thetaquotienten in der allgemeinsten Gestalt:

$$\frac{\vartheta\left[\frac{\alpha^{(21)}}{r}\right]((0)) \cdots \vartheta\left[\frac{\alpha^{(2r)}}{r}\right]((0))}{\vartheta\left[\frac{\beta^{(21)}}{r}\right]((0)) \cdots \vartheta\left[\frac{\beta^{(2r)}}{r}\right]((0))} \cdot \frac{\vartheta\left[\frac{\alpha^{(13)}}{r}\right]((u)) \cdots \vartheta\left[\frac{\alpha^{(1r)}}{r}\right]((u))}{\vartheta\left[\frac{\beta^{(13)}}{r}\right]((u)) \cdots \vartheta\left[\frac{\beta^{(1r)}}{r}\right]((u))} \cdot \frac{\vartheta\left[\frac{\alpha^{(11)}}{r}\right]((u+v))}{\vartheta\left[\frac{\beta^{(11)}}{r}\right]((u+v))}$$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{\left[\frac{\varepsilon}{r}\right]} \left\{\begin{matrix} \vartheta\left[\frac{\varepsilon-\alpha^{(21)}}{r}\right]((u))\; \vartheta\left[\frac{\varepsilon-\alpha^{(11)}}{r}\right]((-v)) \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon-\alpha^{(22)}}{r}\right]((u))\; \vartheta\left[\frac{\varepsilon-\alpha^{(12)}}{r}\right]((v)) \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon-\alpha^{(23)}}{r}\right]((u))\; \vartheta\left[\frac{\varepsilon-\alpha^{(13)}}{r}\right]((0)) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon-\alpha^{(2r)}}{r}\right]((u))\; \vartheta\left[\frac{\varepsilon-\alpha^{(1r)}}{r}\right]((0)) \end{matrix}\right\} e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu}}{\displaystyle\sum_{\left[\frac{\varepsilon}{r}\right]} \left\{\begin{matrix} \vartheta\left[\frac{\varepsilon-\beta^{(21)}}{r}\right]((u))\; \vartheta\left[\frac{\varepsilon-\beta^{(11)}}{r}\right]((-v)) \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon-\beta^{(22)}}{r}\right]((u))\; \vartheta\left[\frac{\varepsilon-\beta^{(12)}}{r}\right]((v)) \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon-\beta^{(23)}}{r}\right]((u))\; \vartheta\left[\frac{\varepsilon-\beta^{(13)}}{r}\right]((0)) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon-\beta^{(2r)}}{r}\right]((u))\; \vartheta\left[\frac{\varepsilon-\beta^{(1r)}}{r}\right]((0)) \end{matrix}\right\} e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu}}.$$

Durch passende Wahl der Zahlen α, β kann die erhaltene Gleichung auf verschiedene Weisen in eine einfachere Form gebracht werden.

Zweiter Theil.

Theorie der Transformation

der

Thetafunctionen.



Erster Abschnitt.

Einleitung in die Transformationstheorie.

1.

Gegeben sei eine Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](\!(u)\!)_a$ definirt durch eine p-fach unendliche Reihe vermittelst der Gleichung:

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](\!(u)\!)_a = \sum_{m_1,\ldots,m_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}(m_\mu+g_\mu)(m_{\mu'}+g_{\mu'})+2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(m_\mu+g_\mu)(u_\mu+h_\mu\pi i)};$$

die Parameter $a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$ sollen dabei nur der für die absolute Convergenz der Reihe nothwendigen und hinreichenden Bedingung, dass für reelle x der reelle Theil von $\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} a_{\mu\mu'}x_\mu x_{\mu'}$ eine negative Form ist, unterworfen sein; die Buchstaben $u_1, \ldots, u_p$ sollen ferner unabhängige complexe Veränderliche, die Buchstaben $g_1, \ldots, g_p$, $h_1, \ldots, h_p$ beliebige reelle Constanten bezeichnen. Die so definirte Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](\!(u)\!)_a$ genügt dann den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](u_1 | \cdots | u_\nu + \pi i | \cdots | u_p)_a &= \vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](u_1 | \cdots | u_\nu | \cdots | u_p)_a e^{2g_\nu \pi i}, \\ \vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](u_1 + a_{1\nu} | \cdots | u_p + a_{p\nu})_a &= \vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](u_1 | \cdots | u_p)_a e^{-2u_\nu - a_{\nu\nu} - 2h_\nu \pi i}, \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

und es sollen die in diesen Formeln auftretenden $2p$ Systeme gleichzeitiger Änderungen der Variablen $u_1 | u_2 | \ldots | u_p$:

$$\begin{array}{llll} \pi i | 0 | \ldots | 0, & \qquad a_{11} | a_{21} | \ldots | a_{p1}, \\ 0 | \pi i | \ldots | 0, & \qquad a_{12} | a_{22} | \ldots | a_{p2}, \\ \ldots\ldots & \qquad \ldots\ldots \\ 0 | 0 | \ldots | \pi i, & \qquad a_{1p} | a_{2p} | \ldots | a_{pp} \end{array}$$

die Periodensysteme der Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](\!(u)\!)_a$ genannt werden. Versteht man weiter unter $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ beliebige reelle Grössen, so soll jedes System von p Grössen von der Form:

$$\varkappa_1 \pi i + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \lambda_\varrho a_{1\varrho} \,|\, \varkappa_2 \pi i + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \lambda_\varrho a_{2\varrho} \;\ldots\; \varkappa_p \pi i + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \lambda_\varrho a_{p\varrho}$$

ein System gleichzeitiger Änderungen der Variablen u genannt werden. Man bilde nun mit Hülfe von $4p^2$ rationalen Zahlen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{d}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ die $2p$ Systeme correspondirender Änderungen der Variablen u:

$$\begin{array}{llll} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{p1}, \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{p2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1p} & A_{2p} & \ldots & A_{pp}, \end{array} \qquad \begin{array}{llll} B_{11} & B_{21} & \ldots & B_{p1}, \\ B_{12} & B_{22} & \ldots & B_{p2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{1p} & B_{2p} & \ldots & B_{pp}, \end{array}$$

wobei für $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p$:

$$A_{\mu\nu} = \mathfrak{a}_{\nu\mu} \pi i + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{b}_{\nu\varrho} a_{\mu\varrho}, \qquad B_{\mu\nu} = \mathfrak{c}_{\nu\mu} \pi i + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{d}_{\nu\varrho} a_{\mu\varrho}$$

ist, und stelle sich die Frage, ob es immer oder nur unter gewissen Voraussetzungen über die rationalen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ möglich ist, die Variablen $u_1 \,|\, u_2 \,|\, \ldots \,|\, u_p$ mit p neuen Variablen $v_1 \,|\, v_2 \,|\, \ldots \,|\, v_p$ durch eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante derart zu verknüpfen, dass den $2p$ Systemen A, B von Änderungen der Variablen u $2p$ Systeme von Änderungen der Variablen v entsprechen, welche als die $2p$ Periodensysteme einer Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((v))_b$ angesehen, also durch passende Wahl ihrer Reihenfolge in die Form:

$$\begin{array}{llll} \pi i & 0 & \ldots & 0, \\ 0 & \pi i & \ldots & 0, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \pi i, \end{array} \qquad \begin{array}{llll} b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{p1}, \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{p2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1p} & b_{2p} & \ldots & b_{pp} \end{array}$$

gebracht werden können, wobei allgemein $b_{\varepsilon\varepsilon'} = b_{\varepsilon'\varepsilon}$ ist, und für reelle x der reelle Theil von $\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} b_{\mu\mu'} x_\mu x_{\mu'}$ eine negative Form ist.

Die zwischen den u und v aufzustellenden linearen Gleichungen sind schon vollständig bestimmt, sobald man nur den ersten p Systemen des ersten, die Grössen A, B enthaltenden Schemas die ersten p des zweiten, die Grössen πi, b enthaltenden Schemas als entsprechende zugeordnet hat, und zwar können dieselben nur die Form:

$$\begin{aligned} \pi i\, u_1 &= A_{11} v_1 + A_{12} v_2 + \cdots + A_{1p} v_p, \\ \pi i\, u_2 &= A_{21} v_1 + A_{22} v_2 + \cdots + A_{2p} v_p, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pi i\, u_p &= A_{p1} v_1 + A_{p2} v_2 + \cdots + A_{pp} v_p \end{aligned}$$

besitzen. Die aus den p^2 Grössen A gebildete Determinante $\varDelta_A = \Sigma \pm A_{11} A_{22} \ldots A_{pp}$ muss dabei entsprechend der vorher gestellten Bedingung einen von Null verschiedenen Werth haben. Diese Bedingung soll zunächst als erfüllt vorausgesetzt werden; es lassen sich dann auch umgekehrt die v linear durch die u ausdrücken in der Form:

$$\frac{\Delta_A}{\pi i} v_1 = \bar{A}_{11} u_1 + \bar{A}_{21} u_2 + \cdots + \bar{A}_{p1} u_p,$$

$$\frac{\Delta_A}{\pi i} v_2 = \bar{A}_{12} u_1 + \bar{A}_{22} u_2 + \cdots + \bar{A}_{p2} u_p,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\Delta_A}{\pi i} v_p = \bar{A}_{1p} u_1 + \bar{A}_{2p} u_2 + \cdots + \bar{A}_{pp} u_p,$$

wobei $\bar{A}_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $A_{\mu\nu}$ in der Determinante Δ_A bezeichnet. Mit Hülfe dieser Gleichungen ergeben sich jetzt für die den Änderungen B der Variablen u entsprechenden Änderungen b der Variablen v die Ausdrücke:

$$b_{1\nu} = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \bar{A}_{\varrho 1} B_{\varrho\nu}, \quad b_{2\nu} = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \bar{A}_{\varrho 2} B_{\varrho\nu}, \ldots, \quad b_{p\nu} = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \bar{A}_{\varrho p} B_{\varrho\nu}, \quad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

und es ist zu untersuchen, ob diese Grössen b den vorher für sie aufgestellten Bedingungen genügen.

Diese Bedingungen verlangen zunächst, dass für jedes ε und ε' von 1 bis p $b_{\varepsilon\varepsilon'} = b_{\varepsilon'\varepsilon}$ sei. Man beweist leicht, dass die $\frac{1}{2}p(p-1)$ Gleichungen $b_{\varepsilon\varepsilon'} = b_{\varepsilon'\varepsilon}$ durch die $\frac{1}{2}p(p-1)$ Gleichungen:

$$\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (A_{\mu\varepsilon} B_{\mu'\varepsilon} - A_{\mu'\varepsilon} B_{\mu\varepsilon}) = 0 \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

ersetzt werden können, und weiter, dass die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen dieser letzteren die ist, dass zwischen den rationalen Zahlen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{d}_{\mu\nu}$ die $p(2p-1)$ Relationen:

$$(\mathfrak{T}_1) \quad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\mathfrak{a}_{\varepsilon\mu} \mathfrak{c}_{\varepsilon\mu'} - \mathfrak{a}_{\varepsilon\mu'} \mathfrak{c}_{\varepsilon\mu}) = 0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\mathfrak{b}_{\varepsilon\mu} \mathfrak{d}_{\varepsilon\mu'} - \mathfrak{b}_{\varepsilon\mu'} \mathfrak{d}_{\varepsilon\mu}) = 0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\mathfrak{a}_{\varepsilon\mu} \mathfrak{d}_{\varepsilon\mu'} - \mathfrak{c}_{\varepsilon\mu} \mathfrak{b}_{\varepsilon\mu'}) = \begin{matrix} t, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{matrix} \end{gathered} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

bestehen, in denen t eine zunächst nicht näher bestimmbare rationale Zahl bezeichnet.

2.

Genügen $4p^2$ Grössen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{d}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ den Relationen $(\mathfrak{T}_1)$, so besitzt das Quadrat der aus ihnen gebildeten Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \ldots & \mathfrak{a}_{1p} & \mathfrak{b}_{11} & \ldots & \mathfrak{b}_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{a}_{p1} & \ldots & \mathfrak{a}_{pp} & \mathfrak{b}_{p1} & \ldots & \mathfrak{b}_{pp} \\ \mathfrak{c}_{11} & \ldots & \mathfrak{c}_{1p} & \mathfrak{d}_{11} & \ldots & \mathfrak{d}_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{c}_{p1} & \ldots & \mathfrak{c}_{pp} & \mathfrak{d}_{p1} & \ldots & \mathfrak{d}_{pp} \end{vmatrix}$$

stets den Werth t^{2p}, und es besteht daher für den Werth d der Determinante D selbst die Gleichung:

$$d = \omega t^p.$$

wobei ω eine zweite Einheitswurzel bezeichnet*); es bestehen ferner zwischen den Elementen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{d}_{\mu\nu}$ der Determinante D und ihren Adjuncten $\bar{\mathfrak{a}}_{\mu\nu}$, $\bar{\mathfrak{b}}_{\mu\nu}$, $\bar{\mathfrak{c}}_{\mu\nu}$, $\bar{\mathfrak{d}}_{\mu\nu}$ die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{a}}_{\mu\nu} &= \omega t^{p-1}\mathfrak{d}_{\mu\nu}, & \bar{\mathfrak{b}}_{\mu\nu} &= -\omega t^{p-1}\mathfrak{c}_{\mu\nu}, \\ \bar{\mathfrak{c}}_{\mu\nu} &= -\omega t^{p-1}\mathfrak{b}_{\mu\nu}, & \bar{\mathfrak{d}}_{\mu\nu} &= \omega t^{p-1}\mathfrak{a}_{\mu\nu}. \end{aligned} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

Führt man diese Ausdrücke in die bekannten Gleichungen, welche zwischen den Elementen einer Determinante und ihren Adjuncten bestehen, an Stelle der letzteren ein, so erhält man die Relationen:

$$(\mathfrak{T}_2) \qquad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\mathfrak{a}_{\mu\varepsilon}\mathfrak{b}_{\mu'\varepsilon} - \mathfrak{a}_{\mu'\varepsilon}\mathfrak{b}_{\mu\varepsilon}) = 0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\mathfrak{c}_{\mu\varepsilon}\mathfrak{d}_{\mu'\varepsilon} - \mathfrak{c}_{\mu'\varepsilon}\mathfrak{d}_{\mu\varepsilon}) = 0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\mathfrak{a}_{\mu\varepsilon}\mathfrak{d}_{\mu'\varepsilon} - \mathfrak{b}_{\mu\varepsilon}\mathfrak{c}_{\mu'\varepsilon}) = \begin{matrix} t, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu. \end{matrix} \end{gathered} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

Diese Relationen $(\mathfrak{T}_2)$ sind eine Folge der Relationen $(\mathfrak{T}_1)$, da zu ihrer Ableitung nur die Existenz dieser letzteren vorausgesetzt wurde. Man kann aber auch rückwärts von den Relationen $(\mathfrak{T}_2)$ aus wieder zu den Relationen $(\mathfrak{T}_1)$ gelangen, und es ist daher einerlei, ob man den $4p^2$ Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ von Anfang an die Bedingungen $(\mathfrak{T}_1)$ oder die Bedingungen $(\mathfrak{T}_2)$ auferlegt.

3.

Erfüllen die $4p^2$ rationalen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die Gleichungen $(\mathfrak{T}_1)$ oder die damit äquivalenten Gleichungen $(\mathfrak{T}_2)$, was von jetzt an immer vorausgesetzt werden soll, so hat nicht nur die Determinante Δ_A der Grössen A stets einen von Null verschiedenen Werth, sondern es ist auch, wenn nur die vorher mit t bezeichnete Grösse, was daher von jetzt an auch noch vorausgesetzt werden soll, positiv ist, bei reellen x der reelle Theil von $\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} b_{\mu\mu'}x_\mu x_{\mu'}$ immer eine negative Form**).

Mit Hülfe des ersten Resultates lässt sich nun aber auch zeigen, dass die im vorigen Artikel eingeführte, mit ω bezeichnete zweite Einheitswurzel stets den Werth $+1$ besitzt. Zu dem Ende bilde man das Product der beiden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} \pi i & \ldots & 0 & -\mathfrak{b}_{11} & \cdots & -\mathfrak{b}_{p1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \pi i & -\mathfrak{b}_{1p} & \cdots & -\mathfrak{b}_{pp} \\ a_{11} & \ldots & a_{p1} & \mathfrak{a}_{11} & \ldots & \mathfrak{a}_{p1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1p} & \ldots & a_{pp} & \mathfrak{a}_{1p} & \ldots & \mathfrak{a}_{pp} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \ldots & \mathfrak{a}_{1p} & \mathfrak{b}_{11} & \ldots & \mathfrak{b}_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{a}_{p1} & \ldots & \mathfrak{a}_{pp} & \mathfrak{b}_{p1} & \ldots & \mathfrak{b}_{pp} \\ \mathfrak{c}_{11} & \ldots & \mathfrak{c}_{1p} & \mathfrak{d}_{11} & \ldots & \mathfrak{d}_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{c}_{p1} & \ldots & \mathfrak{c}_{pp} & \mathfrak{d}_{p1} & \ldots & \mathfrak{d}_{pp} \end{vmatrix}$$

*) Es wird im nächsten Artikel bewiesen werden, dass im vorliegenden Falle ω nur den Werth $+1$ besitzen kann.

**) Zum Beweise dieser beiden Sätze vergl. Weber, Über die unendlich vielen Formen der ϑ-Function. (Journal für r. u. a. Mathematik, Bd. 74, pag. 57.)

von denen die erste, wie man leicht sieht, den Werth Δ_A besitzt, die zweite aber den Werth ωt^p hat, und zwar in der Weise, dass man die Verticalreihen der ersten mit den Horizontalreihen der zweiten componirt. Die dann entstehende neue Determinante besitzt, wie unmittelbar ersichtlich, den Werth $\Delta_A \,.\, t^p$, und es kann daher die Grösse ω, da Δ_A von Null verschieden ist, nur den Werth $+1$ haben.

4.

Man nehme nun an, dass gegeben seien eine Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ und $4p^2$ rationale Zahlen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{d}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$, welche die Bedingungen $(\mathfrak{T}_1)$ oder die damit äquivalenten $(\mathfrak{T}_2)$ erfüllen. Man setze dann:

$$(1)\quad A_{\mu\nu} = \mathfrak{a}_{\nu\mu}\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \mathfrak{b}_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}, \qquad (2)\quad B_{\mu\nu} = \mathfrak{c}_{\nu\mu}\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \mathfrak{d}_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

bezeichne die Determinante der p^2 Grössen A mit Δ_A, die Adjuncte von $A_{\mu\nu}$ in dieser Determinante mit $\overline{A}_{\mu\nu}$ und definire p neue Variablen v und $\frac{1}{2}p(p+1)$ neue Parameter b implicite durch die Gleichungen:

$$(3)\quad u_\mu = \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} A_{\mu\nu} v_\nu, \qquad (4)\quad B_{\mu\varrho} = \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} A_{\mu\nu} b_{\nu\varrho}, \qquad (\mu, \varrho = 1, 2, \ldots, p)$$

oder auch explicite durch die damit äquivalenten:

$$(5)\quad v_\nu = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \overline{A}_{\mu\nu} u_\mu, \qquad (6)\quad b_{\nu\varrho} = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \overline{A}_{\mu\nu} B_{\mu\varrho}. \qquad (\nu, \varrho = 1, 2, \ldots, p)$$

Unter Beachtung des vorher erhaltenen Resultates, dass die Grössen b als Parameter einer absolut convergenten Thetareihe betrachtet werden können, lässt sich dann als Transformationsproblem für die Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ die Aufgabe bezeichnen, die Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ durch Functionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g' \\ h' \end{smallmatrix}\right]((v))_b$ auszudrücken, und es gehört auch in das Bereich der folgenden Untersuchungen, die Frage zu beantworten, ob das so gestellte Problem für jedes System von rationalen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, welches den obigen Bedingungen genügt, lösbar ist.

Das gestellte Problem ist vollständig bestimmt, sobald die $4p^2$ rationalen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ gegeben sind. Man denke sich dieselben zur Charakterisirung der Transformation in ein quadratisches Schema von der Form:

$$T = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \mathfrak{a}_{11} & \ldots & \mathfrak{a}_{1p} & \mathfrak{b}_{11} & \ldots & \mathfrak{b}_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{a}_{p1} & \ldots & \mathfrak{a}_{pp} & \mathfrak{b}_{p1} & \ldots & \mathfrak{b}_{pp} \\ \hline \mathfrak{c}_{11} & \ldots & \mathfrak{c}_{1p} & \mathfrak{d}_{11} & \ldots & \mathfrak{d}_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{c}_{p1} & \ldots & \mathfrak{c}_{pp} & \mathfrak{d}_{p1} & \ldots & \mathfrak{d}_{pp} \end{array}\right|$$

gebracht. Dieses System von $4p^2$ Zahlen soll dann die Charakteristik der Transformation, die vier Räume, in denen die Grössen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ beziehlich stehen, der erste, zweite, dritte, vierte Quadrant der Charakteristik genannt werden. Wenn kein Missverständniss zu befürchten ist, soll die Charakteristik zur Abkürzung mit:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a}_{\mu\nu} & \mathfrak{b}_{\mu\nu} \\ \hline \mathfrak{c}_{\mu\nu} & \mathfrak{d}_{\mu\nu} \end{array}\right|$$

bezeichnet werden. Die in einem Quadranten vorkommenden Zahlen sollen die Elemente des Quadranten genannt werden. Besitzen alle ausserhalb der Hauptdiagonale eines Quadranten stehenden Elemente den Werth Null, die in der Hauptdiagonale stehenden Elemente aber den nämlichen Werth w, so soll dies dadurch angedeutet werden, dass man:

$$\begin{array}{ccc} w & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & w \end{array}$$

in den betreffenden Quadranten setzt; dabei ist der Fall $w = 0$ nicht ausgeschlossen, in diesem Falle soll jedoch auch die kürzere Bezeichnungsweise, dass man in die Mitte des Quadranten eine Null setzt, erlaubt sein. Endlich soll es noch gestattet sein, die zu der Charakteristik T gehörige Transformation kurz als die Transformation T zu bezeichnen, und es ist dabei immer vorausgesetzt, dass die Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ die Bedingungen $(\mathfrak{T}_1)$, $(\mathfrak{T}_2)$ erfüllen; die Zahl t soll die Ordnungszahl der Transformation genannt werden.

5.

Ist das im vorigen Artikel gestellte Transformationsproblem für irgend zwei specielle Charakteristiken:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a}_{\mu\nu} & \mathfrak{b}_{\mu\nu} \\ \hline \mathfrak{c}_{\mu\nu} & \mathfrak{d}_{\mu\nu} \end{array}\right| \qquad T' = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a}'_{\mu\nu} & \mathfrak{b}'_{\mu\nu} \\ \hline \mathfrak{c}'_{\mu\nu} & \mathfrak{d}'_{\mu\nu} \end{array}\right|$$

gelöst, so kann man aus diesen Lösungen immer die Lösung desselben Problems für die Charakteristik:

$$T'' = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a}''_{\mu\nu} & \mathfrak{b}''_{\mu\nu} \\ \hline \mathfrak{c}''_{\mu\nu} & \mathfrak{d}''_{\mu\nu} \end{array}\right|$$

ableiten, deren Elemente sich aus den Elementen von T und T' zusammensetzen mit Hülfe der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}''_{\mu\nu} &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} (\mathfrak{a}_{\varrho\nu}\mathfrak{a}'_{\mu\varrho} + \mathfrak{c}_{\varrho\nu}\mathfrak{b}'_{\mu\varrho}), & \mathfrak{b}''_{\mu\nu} &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} (\mathfrak{b}_{\varrho\nu}\mathfrak{a}'_{\mu\varrho} + \mathfrak{d}_{\varrho\nu}\mathfrak{b}'_{\mu\varrho}), \\ \mathfrak{c}''_{\mu\nu} &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} (\mathfrak{a}_{\varrho\nu}\mathfrak{c}'_{\mu\varrho} + \mathfrak{c}_{\varrho\nu}\mathfrak{d}'_{\mu\varrho}), & \mathfrak{d}''_{\mu\nu} &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} (\mathfrak{b}_{\varrho\nu}\mathfrak{c}'_{\mu\varrho} + \mathfrak{d}_{\varrho\nu}\mathfrak{d}'_{\mu\varrho}). \end{aligned} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

Unter den gemachten Voraussetzungen kann man nämlich einmal die Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ durch Functionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g' \\ h' \end{smallmatrix}\right]((v))_b$ ausdrücken, wenn man den Zusammenhang der Grössen u und a mit den Grössen v und b in der vorher angegebenen Weise durch die Gleichungen:

$$(1)\quad A_{\mu\nu} = \mathfrak{a}_{\nu\mu}\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \mathfrak{b}_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}, \qquad (2)\quad B_{\mu\nu} = \mathfrak{c}_{\nu\mu}\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \mathfrak{d}_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$(3)\quad u_\mu = \frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p} A_{\mu\nu} v_\nu, \qquad (4)\quad B_{\mu\varrho} = \frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p} A_{\mu\nu} b_{\nu\varrho}, \qquad (\mu, \varrho = 1, 2, \ldots, p)$$

$$(5)\quad v_\nu = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \bar{A}_{\mu\nu} u_\mu, \qquad (6)\quad b_{\nu\varrho} = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \bar{A}_{\mu\nu} B_{\mu\varrho} \qquad (\nu, \varrho = 1, 2, \ldots, p)$$

definirt. Man kann weiter aber auch eine jede der bei der ersten Transformation aufgetretenen Functionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g' \\ h' \end{smallmatrix}\right]((v))_b$ vermittelst der zweiten Transformation durch Functionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g'' \\ h'' \end{smallmatrix}\right]((w))_c$ ausdrücken, wenn man den Zusammenhang der Grössen v und b mit den Grössen w und c durch die Gleichungen:

$$(1')\quad A'_{\nu\varrho} = \mathfrak{a}'_{\varrho\nu}\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \mathfrak{b}'_{\varrho\varkappa} b_{\nu\varkappa}, \qquad (2')\quad B'_{\nu\varrho} = \mathfrak{c}'_{\varrho\nu}\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \mathfrak{d}'_{\varrho\varkappa} b_{\nu\varkappa}, \qquad (\nu, \varrho = 1, 2, \ldots, p)$$

$$(3')\quad v_\nu = \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} A'_{\nu\varrho} w_\varrho, \qquad (4')\quad B'_{\nu\sigma} = \frac{1}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} A'_{\nu\varrho} c_{\varrho\sigma}, \qquad (\nu, \sigma = 1, 2, \ldots, p)$$

$$(5')\quad w_\varrho = \frac{\pi i}{\Delta_{A'}}\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \bar{A}'_{\nu\varrho} v_\nu, \qquad (6')\quad c_{\varrho\sigma} = \frac{\pi i}{\Delta_{A'}}\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \bar{A}'_{\nu\varrho} B'_{\nu\sigma} \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, p)$$

definirt, wobei $\Delta_{A'}$ die Determinante $\Sigma \pm A'_{11} A'_{22} \ldots A'_{pp}$ der p^2 Grössen A', $\bar{A}'_{\nu\varrho}$ die Adjuncte von $A'_{\nu\varrho}$ in dieser Determinante bezeichnet. In Folge dessen lässt sich daher auch die ursprüngliche Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ durch Functionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g'' \\ h'' \end{smallmatrix}\right]((w))_c$ ausdrücken, und man zeigt leicht, dass die auf diese Weise entstehende Darstellung der Transformation T'' entspricht.

Die Charakteristik T'' soll die aus den Charakteristiken T und T' zusammengesetzte Charakteristik genannt werden, und es soll die Beziehung zwischen den drei Charakteristiken T, T' und T'' symbolisch durch:

$$TT' = T''$$

fixirt werden. Dass man ebenso aus mehreren Charakteristiken $T_1, T_2, \ldots, T_n$, nachdem man dieselben in eine bestimmte Reihenfolge gebracht hat, durch Zusammensetzung eine neue Charakteristik $T_1 T_2 \ldots T_n$ erzeugen kann, leuchtet unmittelbar ein, und das vorher erhaltene Resultat lässt sich entsprechend dahin verallgemeinern, dass man aus den Lösungen der den Charakteristiken $T_1, T_2, \ldots, T_n$ entsprechenden Transformationsprobleme immer durch passende Combination die Lösung des der zusammengesetzten Charakteristik $T_1 T_2 \ldots T_n$ entsprechenden Transformationsproblems erhalten kann; es soll daher auch die auf diese Weise entstandene, der zusammengesetzten Charakteristik $T_1 T_2 \ldots T_n$ entsprechende Transformation aus den Transformationen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ zusammengesetzt genannt werden. Die Ordnungs-

zahl der zusammengesetzten Transformation ist gleich dem Producte der Ordnungszahlen der einzelnen Transformationen. Bei dieser Zusammensetzung der Transformationen gilt, wie aus der Natur der Operationen klar ist, das Associationsgesetz.

6.

Unter allen möglichen Transformationen gibt es eine, welche dadurch ausgezeichnet ist, dass bei ihrer Anwendung:

$$v_\nu = u_\nu, \qquad b_{\nu\varrho} = a_{\nu\varrho} \qquad {\scriptstyle (\nu, \varrho = 1, 2, \ldots, p)}$$

wird; dieselbe soll die identische Transformation genannt und mit J bezeichnet werden; sie entsteht, wenn man $\mathfrak{a}_{11} = \cdots = \mathfrak{a}_{pp} = \mathfrak{d}_{11} = \cdots = \mathfrak{d}_{pp} = 1$, alle übrigen Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$ sowie sämmtliche Grössen $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ aber der Null gleich setzt; es ist daher:

$$J = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right|;$$

die zugehörige Ordnungszahl hat den Werth 1. Setzt man die Transformation J auf eine der beiden möglichen Weisen mit einer beliebigen Transformation T zusammen, so entsteht, von der Bezeichnung der Variablen und Parameter abgesehen, stets die Transformation T wieder, d. h. es ist $JT = T$, $TJ = T$.

Zu einer gegebenen Transformation:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a}_{\mu\nu} & \mathfrak{b}_{\mu\nu} \\ \hline \mathfrak{c}_{\mu\nu} & \mathfrak{d}_{\mu\nu} \end{array}\right|$$

gibt es immer eine andere:

$$T^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} \dfrac{\mathfrak{d}_{\nu\mu}}{t} & -\dfrac{\mathfrak{b}_{\nu\mu}}{t} \\ \hline -\dfrac{\mathfrak{c}_{\nu\mu}}{t} & \dfrac{\mathfrak{a}_{\nu\mu}}{t} \end{array}\right|,$$

welche die Ordnungszahl t^{-1} besitzt, und welche durch die Gleichung:

$$TT^{-1} = J$$

vollständig bestimmt ist. Diese Transformation T^{-1} soll die zur Transformation T inverse Transformation genannt werden. Dass auch umgekehrt $T^{-1}T = J$, also auch T die zu T^{-1} inverse Transformation ist, leuchtet ein. Führt die Transformation T, auf eine Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ angewandt, auf Functionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g' \\ h' \end{smallmatrix}\right]((v))_b$, so führt die inverse Transformation T^{-1}, auf eine Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((v))_b$ angewandt, umgekehrt zu Functionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g' \\ h' \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ zurück. Sobald also das Problem, die Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ durch

Functionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g' \\ h' \end{smallmatrix}\right]((v))_b$ auszudrücken, für jede Transformation gelöst ist, erscheint auch das umgekehrte Problem, die Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((v))_b$ durch Functionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g' \\ h' \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ auszudrücken, da es nach dem soeben Gesagten nichts anderes ist als wieder ein Transformationsproblem, von selbst gelöst.

Eine beliebige Transformation T kann man immer aus n Transformationen, von denen $n-1$, etwa $T_1, \ldots, T_{\nu-1}, T_{\nu+1}, \ldots, T_n$ willkürlich angenommen werden können, während die n^{te} durch diese und die Transformation T eindeutig bestimmt ist, zusammensetzen in der Form:

$$T = T_1 \ldots T_{\nu-1} T_\nu T_{\nu+1} \ldots T_n.$$

Setzt man nämlich, indem man die zu den gegebenen Transformationen $T_1, \ldots, T_{\nu-1}, T_{\nu+1}, \ldots, T_n$ inversen Transformationen mit $T_1^{-1}, \ldots, T_{\nu-1}^{-1}, T_{\nu+1}^{-1}, \ldots, T_n^{-1}$ bezeichnet:

$$T_\nu = T_{\nu-1}^{-1} \ldots T_1^{-1} T T_n^{-1} \ldots T_{\nu+1}^{-1}$$

und führt das so bestimmte T_ν in die obige Gleichung ein, so wird dieselbe richtig. Umgekehrt folgt aus der obigen Gleichung, sobald man sie als bestehend voraussetzt, für T_ν immer der aufgestellte Ausdruck.

Dieses Princip der Zusammensetzung einer gegebenen Transformation T aus mehreren, ist für die im Folgenden zu entwickelnde Transformationstheorie als ein fundamentales anzusehen. Durch passende Anwendung desselben kann man nämlich die Lösung des allgemeinen Transformationsproblems reduciren auf die Lösung einer geringen Anzahl einfacherer Transformationsprobleme, welche mittelst direkter Methoden behandelt werden können.

Die Ordnungszahl t der Transformation T ist in Folge der über die Grössen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ gemachten Voraussetzungen eine positive rationale Zahl, und zwar für den allgemeinen Fall willkürlich annehmbar. Hat diese Zahl den speciellen Werth 1, so soll die zugehörige Transformation eine lineare genannt werden. Die linearen Transformationen sollen zunächst behandelt werden, und zwar sollen in den nächsten Abschnitten jene einfachsten linearen Transformationen betrachtet werden, aus denen sich, wie später gezeigt werden wird, die allgemeine zusammensetzen lässt. Diese einfachsten linearen Transformationen, die im Folgenden „elementare" genannt werden, ergeben sich durch direkte Umformung der Thetareihe und sollen vorerst ausschliesslich von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet werden.

Zweiter Abschnitt.

Die erste elementare lineare Transformation.

1.

Eine erste Umformung der Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ wird dadurch erhalten, dass man in der die Function darstellenden Reihe an Stelle der Summationsbuchstaben $m_1, m_2, \ldots, m_p$ p neue Summationsbuchstaben $n_1, n_2, \ldots, n_p$ einführt mit Hülfe einer linearen Substitution von nicht verschwindender Determinante:

$$(S)\qquad \begin{aligned} rm_1 &= d_{11}n_1 + d_{21}n_2 + \cdots + d_{p1}n_p, \\ rm_2 &= d_{12}n_1 + d_{22}n_2 + \cdots + d_{p2}n_p, \\ &\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ rm_p &= d_{1p}n_1 + d_{2p}n_2 + \cdots + d_{pp}n_p, \end{aligned}$$

bei der r eine positive ganze Zahl, die d ganze Zahlen sind. Bezeichnet man die Determinante $\Sigma \pm d_{11}d_{22}\ldots d_{pp}$ der p^2 Zahlen d mit D und die Adjuncte von $d_{\mu\nu}$ in dieser Determinante mit $d'_{\mu\nu}$, so folgt aus den Gleichungen (S) durch Auflösung:

$$(S')\qquad \begin{aligned} Dn_1 &= r(d'_{11}m_1 + d'_{12}m_2 + \cdots + d'_{1p}m_p), \\ Dn_2 &= r(d'_{21}m_1 + d'_{22}m_2 + \cdots + d'_{2p}m_p), \\ &\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Dn_p &= r(d'_{p1}m_1 + d'_{p2}m_2 + \cdots + d'_{pp}m_p). \end{aligned}$$

Um Weitläufigkeiten in der Darstellung zu vermeiden, soll die Untersuchung zunächst für deu Fall, wo alle Grössen g und h den Werth Null haben, durchgeführt werden. Es geht daun aus der Gleichung:

$$(F)\qquad \vartheta((u))_a = \sum_{m_1,\ldots,m_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}m_\mu m_{\mu'} + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu u_\mu}$$

durch Anwendung der Substitution (S) die Gleichung:

$$(F_1)\qquad \vartheta((u))_a = \sum_n e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p} b_{\nu\nu'}n_\nu n_{\nu'} + 2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} n_\nu v_\nu}$$

hervor, wenn man die Grössen b und v durch die Gleichungen:

$$b_{\nu\nu'} = \frac{1}{r^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} d_{\nu\mu} d_{\nu'\mu'} a_{\mu\mu'}, \qquad v_\nu = \frac{1}{r}\sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{\nu\mu} u_\mu \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

definirt, und es ist dabei die auf der rechten Seite angedeutete Summation nach den n in der Weise auszuführen, dass man an Stelle des Systems der p Summationsbuchstaben $n_1, n_2, \ldots, n_p$ ein jedes der Werthesysteme treten lässt, welche sich dafür aus den Gleichungen (S') ergeben, wenn man eine jede der p Grössen $m_1, m_2, \ldots, m_p$ unabhängig von den übrigen alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt. Man erkennt aber leicht, dass man diese Summation auch so ausführen kann, dass man die p Grössen $n_1, n_2, \ldots, n_p$ durch die Grössen:

$$\hat{n}_1 + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_1}{\bar{D}}, \quad \hat{n}_2 + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_2}{\bar{D}}, \ldots, \hat{n}_p + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_p}{\bar{D}},$$

in denen zur Abkürzung:

$$\bar{\bar{\varrho}}_1 = r(d'_{11}\varrho_1 + d'_{12}\varrho_2 + \cdots + d'_{1p}\varrho_p),$$
$$\bar{\bar{\varrho}}_2 = r(d'_{21}\varrho_1 + d'_{22}\varrho_2 + \cdots + d'_{2p}\varrho_p),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\bar{\bar{\varrho}}_p = r(d'_{p1}\varrho_1 + d'_{p2}\varrho_2 + \cdots + d'_{pp}\varrho_p)$$

gesetzt ist, beziehlich ersetzt, sodann für $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \ldots, \hat{n}_p$ ein jedes System von p ganzen Zahlen, für welches die Zahlen:

$$d_{11}\hat{n}_1 + \cdots + d_{p1}\hat{n}_p, \quad d_{12}\hat{n}_1 + \cdots + d_{p2}\hat{n}_p, \ldots, d_{1p}\hat{n}_1 + \cdots + d_{pp}\hat{n}_p$$

ganze Vielfache von r sind, und jedesmal für $\varrho_1\ \varrho_2 \ldots \varrho_p$ eine jede der $\bar{D}^p$ Variationen der Elemente $0, 1, 2, \ldots, \bar{D}-1$ zur p^{ten} Classe mit Wiederholung einführt, endlich die dann entstandene Summe durch die Anzahl s' der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(C') \qquad \begin{aligned} r(d'_{11}x_1 + d'_{12}x_2 + \cdots + d'_{1p}x_p) &\equiv 0 \pmod{D}, \\ r(d'_{21}x_1 + d'_{22}x_2 + \cdots + d'_{2p}x_p) &\equiv 0 \pmod{D}, \\ &\cdots\cdots \\ r(d'_{p1}x_1 + d'_{p2}x_2 + \cdots + d'_{pp}x_p) &\equiv 0 \pmod{D} \end{aligned}$$

theilt. Multiplicirt man dann noch linke und rechte Seite der entstandenen Gleichung mit s, so geht aus der Gleichung (F_1) die neue Gleichung:

$$(F_2) \qquad s'\vartheta(\!(u)\!)_a = \sum_{\varrho_1, \ldots \varrho_p}^{0,1,\ldots,\bar{D}-1} \sum_{\hat{n}} e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p} b_{\nu\nu'}\left(\hat{n}_\nu + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_\nu}{\bar{D}}\right)\left(\hat{n}_{\nu'} + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_{\nu'}}{\bar{D}}\right) + 2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\left(\hat{n}_\nu + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_\nu}{\bar{D}}\right)v_\nu}$$

hervor, bei der die Summation in der soeben angegebenen Weise zu geschehen hat.

Die hierbei nach den $\hat{n}$ auszuführende Summation kann von der ihr anhaftenden Beschränkung befreit werden, indem man den Ausdruck:

$$F = \frac{1}{r^p}\sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p}^{0,1,\ldots,r-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\left(\hat{n}_\nu + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_\nu}{\bar{D}}\right)\bar{\sigma}_\nu},$$

bei dem zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_1 &= d_{11}\sigma_1 + d_{12}\sigma_2 + \cdots + d_{1p}\sigma_p,\\
\bar{\sigma}_2 &= d_{21}\sigma_1 + d_{22}\sigma_2 + \cdots + d_{2p}\sigma_p,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\bar{\sigma}_p &= d_{p1}\sigma_1 + d_{p2}\sigma_2 + \cdots + d_{pp}\sigma_p
\end{aligned}$$

gesetzt ist, hinter $\sum\limits_{n}$ als Factor einschiebt. Da nämlich der Ausdruck F immer den Werth Null besitzt, wenn an Stelle der $\hat{n}$ solche ganze Zahlen gesetzt werden, für welche die p Grössen:

$$d_{11}\hat{n}_1 + \cdots + d_{p1}\hat{n}_p, \quad d_{12}\hat{n}_1 + \cdots + d_{p2}\hat{n}_p, \; \ldots, \; d_{1p}\hat{n}_1 + \cdots + d_{pp}\hat{n}_p$$

nicht sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind, dagegen den Werth Eins, wenn die soeben angeschriebenen p Grössen sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind, so erleidet durch Einschiebung des Factors F der Werth der Summe keine Änderung, aber man kann alsdann das Zeichen $\sum\limits_{\hat{n}}$ durch das Zeichen $\sum\limits_{\hat{n}_1,\ldots,\hat{n}_p}^{-\infty,\ldots,+\infty}$ ersetzen, das andeutet, dass nach jeder der p Grössen $\hat{n}$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu summiren ist. Multiplicirt man dann noch linke und rechte Seite der so entstandenen Gleichung mit r^p, so erhält man aus der Gleichung (F_2) die Gleichung:

$$(F_3) \qquad r^p s' \vartheta(\!(u)\!)_a$$
$$= \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\bar{D}-1} \; \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_p}^{0,1,\ldots,r-1} \; \sum_{\hat{n}_1,\ldots,\hat{n}_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p} b_{\nu\nu'}\left(\hat{n}_\nu + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_\nu}{D}\right)\left(\hat{n}_{\nu'} + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_{\nu'}}{D}\right) + 2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\left(\hat{n}_\nu + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_\nu}{D}\right)\left(v_\nu + \frac{\bar{\sigma}_\nu}{r}\pi i\right)}.$$

Die Gleichung (F_3) geht aber unmittelbar in die gewünschte Thetaformel über, wenn man die auf ihrer rechten Seite hinter den ersten beiden Summenzeichen stehende p-fach unendliche Reihe durch die mit ihr identische Thetafunction ersetzt. Man erhält so diese Formel in der Gestalt:

$$(\mathrm{I}_0) \qquad r^p s' \vartheta(\!(u)\!)_a = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\bar{D}-1} \; \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_p}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\bar{\bar{\varrho}}}{D}\\[2ex] \dfrac{\bar{\sigma}}{r}\end{bmatrix}(\!(v)\!)_b,$$

und aus ihr durch passende Änderung der in ihr vorkommenden Variablen u, v die allgemeinere:

$$(1) \qquad r^p s' \vartheta\begin{bmatrix}g\\ h\end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\bar{D}-1} \; \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_p}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\bar{\bar{g}} + \bar{\bar{\varrho}}}{D}\\[2ex] \dfrac{\bar{h} + \bar{\sigma}}{r}\end{bmatrix}(\!(v)\!)_b \, e^{-\frac{2\pi i}{rD}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\bar{\bar{g}}_\nu\bar{\sigma}_\nu},$$

in der $g_1, \ldots, g_p$, $h_1, \ldots, h_p$ beliebige reelle Constanten bezeichnen, aus denen sich die $\bar{\bar{g}}$, $\bar{h}$ ebenso zusammensetzen wie die $\bar{\bar{\varrho}}$, $\bar{\sigma}$ aus den ϱ, σ.

2.

In der Formel (I) setze man nun, indem man unter $k_1, \ldots, k_p, l_1, \ldots, l_p$ beliebige reelle Constanten, unter $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ beliebige ganze Zahlen versteht und mit $\hat{k}, \hat{\hat{l}}, \hat{\varkappa}, \hat{\hat{\lambda}}$ die aus diesen Grössen gebildeten Formen:

$$\hat{k}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d_{\nu\mu} k_\nu, \qquad \hat{\hat{l}}_\mu = r \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d'_{\nu\mu} l_\nu,$$
$$\hat{\varkappa}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d_{\nu\mu} \varkappa_\nu, \qquad \hat{\hat{\lambda}}_\mu = r \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d'_{\nu\mu} \lambda_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p)$$

bezeichnet, für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$g_\mu = \frac{1}{r} (\hat{k}_\mu + \hat{\varkappa}_\mu), \qquad h_\mu = \frac{1}{D} (\hat{\hat{l}}_\mu + \hat{\hat{\lambda}}_\mu),$$

multiplicire linke und rechte Seite der entstandenen Formel mit:

$$e^{-\frac{2\pi i}{rD} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \hat{k}_\mu \hat{\hat{\lambda}}_\mu} = e^{-2\pi i \sum_{\nu=1}^{\nu=p} k_\nu \lambda_\nu}$$

und summire allgemein nach $\varkappa_\mu$ von 0 bis $r-1$, nach λ_μ von 0 bis $\bar{D}-1$. Man erhält dann, wenn man noch mit s die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(C) \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{1\mu} x_\mu \equiv 0 \text{ (mod. } r), \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{2\mu} x_\mu \equiv 0 \text{ (mod. } r), \; \ldots, \; \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{p\mu} x_\mu \equiv 0 \text{ (mod. } r)$$

bezeichnet, die Formel:

$$(\bar{\text{I}}) \qquad D^p s\, \vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b = \sum_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p}^{0, 1, \ldots, r-1} \; \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_p}^{0, 1, \ldots, \bar{D}-1} \vartheta \begin{bmatrix} \dfrac{\hat{k} + \hat{\varkappa}}{r} \\ \dfrac{\hat{\hat{l}} + \hat{\hat{\lambda}}}{D} \end{bmatrix} (\!(u)\!)_a \, e^{-\frac{2\pi i}{rD} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \hat{k}_\mu \hat{\hat{\lambda}}_\mu}.$$

Die gewonnenen Formeln (I), ($\bar{\text{I}}$) stehen, wie aus dem Gange der letzten Untersuchung erhellt, in der Beziehung zu einander, dass jede von ihnen als die Umkehrung der anderen betrachtet werden kann; sie können aber auch als nicht wesentlich verschiedene Formeln angesehen werden, wenn man beachtet, dass ebenso, wie die Formel (I) dadurch entstanden ist, dass man in der die Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a$ darstellenden unendlichen Reihe an Stelle der Summationsbuchstaben m neue Summationsbuchstaben n durch die Substitution (S) einführt, die Formel ($\bar{\text{I}}$) dadurch erhalten werden kann, dass man in der die Function $\vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b$ darstellenden Reihe an Stelle der Summationsbuchstaben n die m als neue Summationsbuchstaben einführt vermittelst der zu (S) inversen Substitution (S').

3.

Es soll jetzt nachgewiesen werden, dass die durch die Formel (I) repräsentirte, durch Einführung neuer Summationsbuchstaben vermittelst einer beliebigen linearen Substitution mit rationalen Coefficienten bewirkte Umformung der Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a$

eine Transformation dieser Function im Sinne der im ersten Abschnitte entwickelten Transformationstheorie ist. Zu dem Ende definire man $4p^2$ rationale Zahlen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{d}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{a}_{\mu\nu} = \frac{r d'_{\mu\nu}}{D}, \qquad \mathfrak{b}_{\mu\nu} = 0,$$
$$\mathfrak{c}_{\mu\nu} = 0, \qquad \mathfrak{d}_{\mu\nu} = \frac{d_{\mu\nu}}{r}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

wobei die d, d', D die in der Formel (I) vorkommenden Grössen bedeuten, beachte, dass dadurch eine lineare Transformation bestimmt ist, und führe diese Werthe in die Gleichungen (1), . . ., (6) des Art. 4 des ersten Abschnitts ein. Die Gleichungen (5), (6) gehen dann in die hinter der Formel (F_1) des ersten Artikels stehenden, die Grössen v, b mit den Grössen u, a verknüpfenden Gleichungen über, und man erkennt daraus, dass die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T_I = \left|\begin{array}{c|c} \frac{r d'_{\mu\nu}}{D} & 0 \\ \hline 0 & \frac{d_{\mu\nu}}{r} \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsproblems durch die vorher aufgestellte Gleichung:

$$(1) \qquad r^p s' \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0,1,\ldots,\bar{D}-1} \; \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\bar{g}} + \bar{\bar{\varrho}}}{D} \\ \frac{\bar{h} + \bar{\sigma}}{r} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b \, e^{-\frac{2\pi i}{rD}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \bar{\bar{g}}_\nu \bar{\sigma}_\nu}$$

geliefert wird, wobei die Grössen v, b mit den Grössen u, a durch die Gleichungen:

$$v_\nu = \frac{1}{r}\sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{\nu\mu} u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{1}{r^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} d_{\nu\mu} d_{\nu'\mu'} a_{\mu\mu'} \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

verknüpft sind; wobei ferner die g, h beliebige reelle Constanten bezeichnen, aus denen sich die $\bar{\bar{g}}$, $\bar{h}$ mit Hülfe der Gleichungen:

$$\bar{\bar{g}}_\nu = r\sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{\nu\mu} g_\mu, \qquad \bar{h}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{\nu\mu} h_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

zusammensetzen; wobei weiter die auf der rechten Seite angedeutete Summation in der Weise auszuführen ist, dass von den in den linearen Formen:

$$\bar{\bar{\varrho}}_\nu = r\sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{\nu\mu} \varrho_\mu, \qquad \bar{\sigma}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{\nu\mu} \sigma_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

vorkommenden Grössen ϱ, σ allgemein nach ϱ_μ von 0 bis $\bar{D} - 1$, nach σ_μ von 0 bis $r - 1$ zu summiren ist; wobei endlich s' die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(C') \quad r\sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{1\mu} x_\mu \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, D), \quad r\sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{2\mu} x_\mu \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, D), \; \ldots, \; r\sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{p\mu} x_\mu \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, D)$$

bezeichnet.

Entsprechend wird die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T_l^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} \frac{d_{\nu\mu}}{r} & 0 \\ \hline 0 & \frac{r d'_{\nu\mu}}{D} \end{array}\right|$$

bestimmten inversen Transformationsproblems durch die vorher aufgestellte Gleichung:

$$(\bar{\text{I}}) \qquad \bar{D}^p s\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix} k \\ l \end{smallmatrix}\right]((v))_b = \sum_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p}^{0,1,\ldots,r-1} \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_p}^{0,1,\ldots,\bar{D}-1} \vartheta\left[\begin{array}{c} \frac{\hat{k}+\hat{\varkappa}}{r} \\ \frac{\hat{\hat{l}}+\hat{\lambda}}{D} \end{array}\right]((u))_a\, e^{-\frac{2\pi i}{rD}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \hat{k}_\mu \hat{\lambda}_\mu}$$

gegeben, da diese letztere durch Umkehrung der Formel (I) entstanden ist. Es sind dabei die Grössen v als unabhängige Veränderliche, die Grössen b als willkürlich gegebene Parameter zu betrachten, während die Grössen u, a als Functionen derselben durch die Gleichungen:

$$u_\mu = \frac{r}{D}\sum_{\nu=1}^{\nu=p} d'_{\nu\mu} v_\nu, \qquad a_{\mu\mu'} = \frac{r^2}{D^2}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\sum_{\nu'=1}^{\nu'=p} d'_{\nu\mu} d'_{\nu'\mu'} b_{\nu\nu'} \qquad {\scriptstyle (\mu,\mu'=1,2,\ldots,p)}$$

bestimmt werden; es bezeichnen ferner die k, l beliebige reelle Constanten, aus denen sich die $\hat{k}$, $\hat{\hat{l}}$ mit Hülfe der Gleichungen:

$$\hat{k}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d_{\nu\mu} k_\nu, \qquad \hat{\hat{l}}_\mu = r\sum_{\nu=1}^{\nu=p} d'_{\nu\mu} l_\nu \qquad {\scriptstyle (\mu=1,2,\ldots,p)}$$

zusammensetzen; es ist weiter die Summation in der Weise auszuführen, dass von den in den linearen Formen:

$$\hat{\varkappa}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d_{\nu\mu}\varkappa_\nu, \qquad \hat{\lambda}_\mu = r\sum_{\nu=1}^{\nu=p} d'_{\nu\mu}\lambda_\nu \qquad {\scriptstyle (\mu=1,2,\ldots,p)}$$

vorkommenden Grössen $\varkappa$, λ allgemein nach $\varkappa_\nu$ von 0 bis $r-1$, nach λ_ν von 0 bis $\bar{D}-1$ zu summiren ist; es bezeichnet endlich s die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(C) \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{1\mu}x_\mu \equiv 0 \pmod{r}, \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{2\mu}x_\mu \equiv 0 \pmod{r}, \ \ldots, \ \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{p\mu}x_\mu \equiv 0 \pmod{r}.$$

Aus den Formeln (I), ($\bar{\text{I}}$) als Hauptformeln folgen einige specielle Formeln, die für das Folgende von Wichtigkeit sind.

Setzt man in den Formeln (I), ($\bar{\text{I}}$) $r = 1$ und beachtet, dass die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{1\mu}x_\mu \equiv 0 \pmod{D}, \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{2\mu}x_\mu \equiv 0 \pmod{D}, \ \ldots, \ \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{p\mu}x_\mu \equiv 0 \pmod{D}$$

$\bar{D}^{p-1}$ ist, so ergiebt sich, dass die Lösungen der durch die Charakteristiken:

$$T_{I_1} = \left|\begin{array}{c|c} \dfrac{d'_{\mu\nu}}{D} & 0 \\ \hline 0 & d_{\mu\nu} \end{array}\right| \qquad\qquad T_{I_1}^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} d_{\nu\mu} & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{d'_{\nu\mu}}{D} \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsprobleme durch die Formeln:

$$(\mathrm{I}_1) \qquad D^{p-1}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\overline{D}-1} \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\bar{g}} + \bar{\bar{\varrho}}}{D} \\ \bar{h} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b,$$

$$(\bar{\mathrm{I}}_1) \qquad \overline{D}^{p}\;\vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{0,1,\ldots,\overline{D}-1} \vartheta\begin{bmatrix} \hat{k} \\ \dfrac{\hat{\hat{l}} + \hat{\hat{\lambda}}}{D} \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a\, e^{-\frac{2\pi i}{D}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \hat{k}_\mu \hat{\hat{\lambda}}_\mu}$$

gegeben werden, bei denen die Grössen u, a mit den Grössen v, b durch die Gleichungen:

$$v_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{\nu\mu} u_\mu\,, \qquad b_{\nu\nu'} = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} d_{\nu\mu} d_{\nu'\mu'} a_{\mu\mu'}\,, \qquad {\scriptstyle (\nu,\,\nu'=1,2,\ldots,p)}$$

oder durch die damit äquivalenten:

$$u_\mu = \frac{1}{D}\sum_{\nu=1}^{\nu=p} d'_{\nu\mu} v_\nu\,, \qquad a_{\mu\mu'} = \frac{1}{D^2}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\sum_{\nu'=1}^{\nu'=p} d'_{\nu\mu} d'_{\nu'\mu'} b_{\nu\nu'} \qquad {\scriptstyle (\mu,\,\mu'=1,2,\ldots,p)}$$

verknüpft sind; bei denen ferner die g, h, k, l beliebige reelle Constanten bezeichnen, aus denen sich die Grössen $\bar{\bar{g}}$, $\bar{h}$, $\hat{k}$, $\hat{\hat{l}}$ mit Hülfe der Gleichungen:

$$\bar{\bar{g}}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{\nu\mu} g_\mu\,, \qquad \bar{h}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{\nu\mu} h_\mu\,, \qquad {\scriptstyle (\nu=1,\,2,\,\ldots,\,p)}$$

$$\hat{k}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d_{\nu\mu} k_\nu\,, \qquad \hat{\hat{l}}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d'_{\nu\mu} l_\nu \qquad {\scriptstyle (\mu=1,\,2,\,\ldots,\,p)}$$

zusammensetzen; bei denen endlich die auf den rechten Seiten angedeuteten Summationen in der Weise auszuführen sind, dass nach jeder der $2p$ in den linearen Formen:

$$\bar{\bar{\varrho}}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{\nu\mu}\varrho_\mu\,, \qquad \hat{\hat{\lambda}}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d'_{\nu\mu}\lambda_\nu \qquad {\scriptstyle (\mu,\,\nu=1,2,\ldots,p)}$$

vorkommenden Grössen ϱ, λ von 0 bis $\overline{D}-1$ zu summiren ist.

Setzt man dagegen in den Formeln (I), ($\bar{\mathrm{I}}$), indem man unter q eine ganze, zu r relativ prime Zahl versteht, $d_{11} = d_{22} = \cdots = d_{pp} = q$, alle übrigen Grössen d aber der Null gleich, so ergibt sich, dass die Lösung der durch die Charakteristiken:

$$T_{I_2} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \frac{r}{q} & \cdots & 0 & & & \\ & \cdots & & & 0 & \\ 0 & \cdots & \frac{r}{q} & & & \\ \hline & & & \frac{q}{r} & \cdots & 0 \\ & 0 & & & \cdots & \\ & & & 0 & \cdots & \frac{q}{r} \end{array}\right| \qquad T_{I_2}^{-1} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \frac{q}{r} & \cdots & 0 & & & \\ & \cdots & & & 0 & \\ 0 & \cdots & \frac{q}{r} & & & \\ \hline & & & \frac{r}{q} & \cdots & 0 \\ & 0 & & & \cdots & \\ & & & 0 & \cdots & \frac{r}{q} \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsprobleme durch die Formeln:

$$(\mathrm{I}_2)\qquad r^p\vartheta\left[\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right]((u))_a=\sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\bar{q}-1}\;\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_p}^{0,1,\ldots,r-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{r(g+\varrho)}{q}\\ \frac{q(h+\sigma)}{r}\end{bmatrix}((v))_b\,e^{-2\pi i\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}g_\mu\sigma_\mu},$$

$$(\bar{\mathrm{I}}_2)\qquad \bar{q}^p\vartheta\left[\begin{smallmatrix}k\\l\end{smallmatrix}\right]((v))_b=\sum_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p}^{0,1,\ldots,r-1}\;\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{0,1,\ldots,\bar{q}-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{q(k+\varkappa)}{r}\\ \frac{r(l+\lambda)}{q}\end{bmatrix}((u))_a\,e^{-2\pi i\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}k_\mu\lambda_\mu}.$$

Die Grössen u, a sind hier mit den Grössen v, b verknüpft durch die Gleichungen:

$$v_\nu=\frac{q}{r}u_\nu,\qquad b_{\nu\nu'}=\frac{q^2}{r^2}a_{\nu\nu'},\qquad (\nu,\nu'=1,2,\ldots,p)$$

oder durch die damit äquivalenten:

$$u_\mu=\frac{r}{q}v_\mu,\qquad a_{\mu\mu'}=\frac{r^2}{q^2}b_{\mu\mu'},\qquad (\mu,\mu'=1,2,\ldots,p)$$

während die g, h, k, l beliebige reelle Grössen bezeichnen.

Aus den Formeln (I_2), $(\bar{\mathrm{I}}_2)$ ergibt sich endlich, indem man $r=1$ setzt, dass die Lösungen der durch die Charakteristiken:

$$T_{I_3}=\left|\begin{array}{ccc|ccc}\frac{1}{q}&\cdots&0&&&\\ &\cdots&&&0&\\ 0&\cdots&\frac{1}{q}&&&\\ \hline &&&q&\cdots&0\\ &0&&&\cdots&\\ &&&0&\cdots&q\end{array}\right|\qquad T_{I_3}^{-1}=\left|\begin{array}{ccc|ccc}q&\cdots&0&&&\\ &\cdots&&&0&\\ 0&\cdots&q&&&\\ \hline &&&\frac{1}{q}&\cdots&0\\ &0&&&\cdots&\\ &&&0&\cdots&\frac{1}{q}\end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsprobleme durch die Formeln:

$$(\mathrm{I}_3)\qquad \vartheta\left[\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right]((u))_a=\sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\bar{q}-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{g+\varrho}{q}\\ qh\end{bmatrix}((v))_b,$$

$$(\bar{\mathrm{I}}_3)\qquad \bar{q}^p\vartheta\left[\begin{smallmatrix}k\\l\end{smallmatrix}\right]((v))_b=\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{0,1,\ldots,\bar{q}-1}\vartheta\begin{bmatrix}qk\\ \frac{l+\lambda}{q}\end{bmatrix}((u))_a\,e^{-2\pi i\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}k_\mu\lambda_\mu}$$

gegeben werden, bei denen die Grössen u, a mit den Grössen v, b durch die Gleichungen:

$$v_\nu=qu_\nu,\qquad b_{\nu\nu'}=q^2a_{\nu\nu'},\qquad (\nu,\nu'=1,2,\ldots,p)$$

oder durch die damit äquivalenten:

$$u_\mu=\frac{1}{q}v_\mu,\qquad a_{\mu\mu'}=\frac{1}{q^2}b_{\mu\mu'},\qquad (\mu,\mu'=1,2,\ldots,p)$$

verknüpft sind, während die g, h, k, l beliebige reelle Grössen bezeichnen.

Dritter Abschnitt.

Die zweite elementare lineare Transformation.

1.

Eine zweite Umformung der gegebenen Function:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{m_1,\ldots,m_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}(m_\mu+g_\mu)(m_{\mu'}+g_{\mu'}) + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(m_\mu+g_\mu)(u_\mu+h_\mu\pi i)}$$

wird dadurch erhalten, dass man im allgemeinen Gliede der die Function darstellenden Reihe an Stelle der $\frac{1}{2}p(p+1)$ Parameter $a_{\mu\mu'}$ $(a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu};\ \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$ $\frac{1}{2}p(p+1)$ neue Parameter $b_{\mu\mu'}$ $(b_{\mu\mu'} = b_{\mu'\mu};\ \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$ einführt, die sich von den Parametern a nur um ganze Vielfache von πi unterscheiden.

Zu dem Ende setze man für $\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p$:

$$b_{\mu\mu'} = a_{\mu\mu'} + e_{\mu\mu'}\pi i,$$

indem man unter den e ganze Zahlen versteht, welche den Bedingungen $e_{\mu\mu'} = e_{\mu'\mu}$ $(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$ genügen, im Übrigen aber keiner Beschränkung unterworfen sein sollen, und führe die so definirten Grössen b an Stelle der Grössen a in die obige Reihe ein. Man erhält dann die neue Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{m_1,\ldots,m_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} b_{\mu\mu'}(m_\mu+g_\mu)(m_{\mu'}+g_{\mu'}) + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(m_\mu+g_\mu)(u_\mu+h'_\mu\pi i)}$$

$$\times\, e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} e_{\mu\mu'}g_\mu g_{\mu'}\pi i - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} e_{\mu\mu}g_\mu\pi i},$$

wobei zur Abkürzung für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$h_\mu + \tfrac{1}{2}\,e_{\mu\mu} - \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} e_{\mu\mu'}g_{\mu'} = h'_\mu$$

gesetzt ist, und aus dieser, indem man die auf ihrer rechten Seite stehende p-fach unendliche Reihe durch die mit ihr identische Thetafunction ersetzt, sofort die Formel:

$$(\mathrm{II})\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a = \vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}((v))_b\, e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p} e_{\nu\nu'} g_\nu g_{\nu'}\pi i - \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} e_{\nu\nu} g_\nu \pi i},$$

wobei:

$$v_\nu = u_\nu, \qquad b_{\nu\nu'} = a_{\nu\nu'} + e_{\nu\nu'}\pi i,$$

$$g'_\nu = g_\nu, \qquad h'_\nu = h_\nu + \tfrac{1}{2} e_{\nu\nu} - \sum_{\nu'=1}^{\nu'=p} e_{\nu\nu'} g_{\nu'} \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

ist.

Durch Umkehrung der Formel (II) entsteht die Formel:

$$(\overline{\mathrm{II}})\qquad \vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}((v))_b = \vartheta\begin{bmatrix} k' \\ l' \end{bmatrix}((u))_a\, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} e_{\mu\mu'} k_\mu k_{\mu'}\pi i + \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} e_{\mu\mu} k_\mu \pi i},$$

wobei:

$$u_\mu = v_\mu, \qquad a_{\mu\mu'} = b_{\mu\mu'} - e_{\mu\mu'}\pi i,$$

$$k'_\mu = k_\mu, \qquad l'_\mu = l_\mu - \tfrac{1}{2} e_{\mu\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu'=p} e_{\mu\mu'} k_{\mu'} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

ist.

Die Formeln (II), ($\overline{\mathrm{II}}$) stehen in der Beziehung zu einander, dass jede von ihnen als die Umkehrung der anderen betrachtet werden kann; sie können aber auch als nicht wesentlich verschieden angesehen werden, da man die Formel ($\overline{\mathrm{II}}$) aus der Formel (II) auch dadurch erhalten kann, dass man allgemein $e_{\mu\mu'}$ durch $-e_{\mu\mu'}$ ersetzt und im Übrigen die Bezeichnung in passender Weise einrichtet.

2.

Es soll jetzt nachgewiesen werden, dass die durch die Formel (II) repräsentirte Umformung der Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a$ eine Transformation dieser Function im Sinne der im ersten Abschnitte entwickelten Transformationstheorie ist. Zu dem Ende definire man $4p^2$ rationale Zahlen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{d}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{a}_{\mu\nu} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \end{matrix} \qquad \mathfrak{b}_{\mu\nu} = 0,$$

$$\mathfrak{c}_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}, \qquad \mathfrak{d}_{\mu\nu} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \end{matrix} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots p)$$

wobei die $e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$ die in der Formel (II) vorkommenden Grössen bedeuten, beachte, dass dadurch eine lineare Transformation bestimmt ist, und führe diese Werthe in die Gleichungen (1), ..., (6) des Art. 4 des ersten Abschnittes ein. Die Gleichungen (5), (6) gehen dann in die hinter der Formel (II) stehenden, die Grössen v, b mit den Grössen u, a verknüpfenden Gleichungen über, und man erkennt daraus, dass die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T_{II} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \ldots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \ldots & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & \ldots & 0 \\ & e_{\mu\nu} & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right| \qquad (e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu})$$

bestimmten Transformationsproblems durch die vorher aufgestellte Formel:

$$\text{(II)} \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b \, e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p} e_{\nu\nu'} g_\nu g_{\nu'} \pi i - \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} e_{\nu\nu} g_\nu \pi i},$$

wobei:

$$v_\nu = u_\nu, \qquad b_{\nu\nu'} = a_{\nu\nu'} + e_{\nu\nu'}\pi i,$$

$$g'_\nu = g_\nu, \qquad h'_\nu = h_\nu + \tfrac{1}{2} e_{\nu\nu} - \sum_{\nu'=1}^{\nu'=p} e_{\nu\nu'} g_{\nu'} \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

ist, geliefert wird.

Entsprechend wird die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T_{II}^{-1} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \ldots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \ldots & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & \ldots & 0 \\ & -e_{\mu\nu} & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right| \qquad (e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu})$$

bestimmten inversen Transformationsproblems durch die vorher aufgestellte Formel:

$$\text{(}\overline{\text{II}}\text{)} \qquad \vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b = \vartheta\begin{bmatrix} k' \\ l' \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a \, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} e_{\mu\mu'} k_\mu k_{\mu'} \pi i + \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} e_{\mu\mu} k_\mu \pi i},$$

wobei:

$$u_\mu = v_\mu, \qquad a_{\mu\mu'} = b_{\mu\mu'} - e_{\mu\mu'}\pi i,$$

$$k'_\mu = k_\mu, \qquad l'_\mu = l_\mu - \tfrac{1}{2} e_{\mu\mu} + \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} e_{\mu\mu'} k_{\mu'}, \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

gegeben, da diese letztere durch Umkehrung der Formel (II) entstanden ist.

Vierter Abschnitt.

Die dritte elementare lineare Transformation.

1.

Aus den in Art. 1 des ersten Abschnitts angeschriebenen $2p$ Periodensystemen der Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ bilde man $2p$ Systeme correspondirender Änderungen:

$$A_{\mu\nu} = \mathfrak{a}_{\nu\mu}\pi i + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{b}_{\nu\varrho} a_{\mu\varrho}, \qquad B_{\mu\nu} = \mathfrak{c}_{\nu\mu}\pi i + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{d}_{\nu\varrho} a_{\mu\varrho} \qquad {\scriptstyle \mu, \nu = 1, 2, \ldots, p}$$

der Variablen $u_1 \mid u_2 \mid \ldots \; u_p$, indem man in den ersten q der p Horizontalreihen die beiden darin vorkommenden Periodensysteme, nachdem man vorher noch das links stehende mit Minuszeichen versehen hat, mit einander vertauscht. Man erhält auf diese Weise die $2p$ Systeme correspondirender Änderungen:

$$\begin{array}{llllll|llllll}
a_{11} & \ldots & a_{q1} & a_{q+1\,1} & \ldots & a_{p1}, & -\pi i & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{1q} & \ldots & a_{qq} & a_{q+1\,q} & \ldots & a_{pq}, & 0 & \ldots & -\pi i & 0 & \ldots & 0, \\
0 & \ldots & 0 & \pi i & \ldots & 0, & a_{1\,q+1} & \ldots & a_{q\,q+1} & a_{q+1\,q+1} & \ldots & a_{p\,q+1}, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \pi i, & a_{1p} & \ldots & a_{qp} & a_{q+1\,p} & \ldots & a_{pp},
\end{array}$$

für welche:

$$\mathfrak{a}_{q+1\,q+1} = \mathfrak{a}_{q+2\,q+2} = \cdots = \mathfrak{a}_{pp} = 1, \qquad \mathfrak{b}_{11} = \mathfrak{b}_{22} = \cdots = \mathfrak{b}_{qq} = 1,$$
$$\mathfrak{c}_{11} = \mathfrak{c}_{22} = \cdots = \mathfrak{c}_{qq} = -1, \qquad \mathfrak{d}_{q+1\,q+1} = \mathfrak{d}_{q+2\,q+2} = \cdots = \mathfrak{d}_{pp} = 1$$

ist, während alle übrigen Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ den Werth Null besitzen, und durch die eine lineare Transformation bestimmt wird. Um die dieser Transformation entsprechenden, im allgemeinen Falle durch die Gleichungen:

$$v_\nu = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \bar{A}_{\mu\nu} u_\mu, \qquad b_{\nu\varrho} = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \bar{A}_{\mu\nu} B_{\mu\varrho} \qquad {\scriptstyle \nu, \varrho = 1, 2, \ldots, p}$$

gegebenen Beziehungen, welche die Grössen v, b mit den Grössen u, a verknüpfen, zu erhalten, bezeichne man mit $\Delta_a^{(q)}$ die stets von Null verschiedene Determinante q^{ten} Grades:

$$\Delta_a^{(q)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{qq} \end{vmatrix}$$

und für $\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, q$ mit $\bar{a}_{\varkappa\lambda}^{(q)}$ die Adjuncte von $a_{\varkappa\lambda}$ in dieser Determinante. Es ist dann:

$$v_\mu = \frac{\pi i}{\Delta_a^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \bar{a}_{\varkappa\mu}^{(q)} u_\varkappa, \qquad v_\nu = u_\nu - \frac{1}{\Delta_a^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} a_{\varkappa\nu} \bar{a}_{\varkappa\lambda}^{(q)} u_\lambda,$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, q) \qquad\qquad (\nu = q+1, q+2, \ldots, p)$$

$$b_{\mu\mu'} = \frac{\pi^2}{\Delta_a^{(q)}} \bar{a}_{\mu\mu'}^{(q)}, \qquad b_{\mu\nu} = \frac{\pi i}{\Delta_a^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \bar{a}_{\varkappa\mu}^{(q)} a_{\varkappa\nu}, \qquad b_{\nu\nu'} = a_{\nu\nu'} - \frac{1}{\Delta_a^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} \bar{a}_{\varkappa\lambda}^{(q)} a_{\varkappa\nu} a_{\lambda\nu'}.$$

$$(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, q) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q;\ \nu = q+1, q+2, \ldots, p) \qquad (\nu, \nu' = q+1, q+2, \ldots, p)$$

Die so definirte Transformation soll als dritte elementare Transformation eingeführt werden, und es handelt sich darum, die ihr entsprechende Thetaformel durch direkte Umformung der ursprünglichen Thetafunction zu erhalten.

2.

Um die gewünschte, der definirten Transformation entsprechende Umformung der Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a$ zu erhalten, bedarf man einer Formel aus der Theorie der Fourier'schen Reihen, die zunächst aufgestellt werden soll.

Es bezeichne $f(x)$ eine reelle oder complexe Function der reellen Veränderlichen x, die für alle der Bedingung $-\frac{1}{2} \leq x \overline{\gtrless} + \frac{1}{2}$ genügenden Werthe von x sammt ihrer ersten und zweiten Derivirten einwerthig und stetig sei; dann gilt die Gleichung:

$$(H_1) \qquad f(0) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\, e^{-2nx\pi i}\, dx.$$

In Bezug auf diese Gleichung ist im Auge zu behalten, dass die auf ihrer rechten Seite stehende Reihe den Charakter einer Doppelreihe hat, d. h. aus zwei selbständigen Reihen, $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ die eine, $u_{-1} + u_{-2} + \cdots + u_{-n} + \cdots$ die andere, besteht, von denen jede für sich convergirt.

Die Formel (H_1) ist ein specieller Fall einer allgemeineren, auf eine Function von mehreren Veränderlichen bezüglichen Formel, welche mit ihrer Hülfe abgeleitet werden kann. Bezeichnet nämlich $f(x_1 \mid x_2 \mid \ldots \mid x_q)$ eine reelle oder complexe Function der q reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_q$, die in dem durch die Bedingungen:

$$-\tfrac{1}{2} < x_1 \overline{<} + \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} \leq x_2 < + \tfrac{1}{2}, \quad \ldots, \quad -\tfrac{1}{2} < x_q < + \tfrac{1}{2}$$

bestimmten Grössengebiete sammt ihren Derivirten $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_q}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \cdots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_q^2}$ einwerthig und stetig ist, so besteht die Gleichung:

$$(H_q)\qquad f(0\,|\cdots|\,0)=\sum_{n_1,\ldots,n_q}^{-\infty,\ldots,+\infty}\int\limits_{-\frac12}^{+\frac12}dx_1\ldots\int\limits_{-\frac12}^{+\frac12}dx_q f(x_1\,|\ldots|\,x_q)\,e^{-2(n_1x_1+\cdots+n_qx_q)\pi i};$$

eine jede der q auf der rechten Seite vorkommenden Summen hat dabei den Charakter einer Doppelsumme, auch kann man die q Summationen beliebig umstellen.

3.

Mit Hülfe der soeben aufgestellten Formel (H_q) soll jetzt die in Art. 1 in Aussicht gestellte Umformung der Function:

$$(F)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(\!(u)\!)_a=\sum_{m_1,\ldots,m_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}a_{\mu\mu'}(m_\mu+g_\mu)(m_{\mu'}+g_{\mu'})+2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(m_\mu+g_\mu)(u_\mu+h_\mu\pi i)}$$

durchgeführt werden. Zu dem Ende setze man:

$$f(x_1\,|\cdots|\,x_q)=e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=q}a_{\mu\mu'}x_\mu x_{\mu'}+2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q}x_\mu\left[u_\mu+\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}(m_{\mu'}+g_{\mu'})a_{\mu\mu'}+h_\mu\pi i\right]},$$

wobei die a, u, m, g, h die im allgemeinen Gliede der obigen Thetareihe vorkommenden Grössen, die x reelle Veränderliche bedeuten, und führe diese specielle Function an Stelle von $f(x_1\,|\cdots|\,x_q)$ in die Formel (H_q) ein; man erhält dann die Gleichung:

$$1=\sum_{n_1,\ldots,n_q}^{-\infty,\ldots,+\infty}\int\limits_{-\frac12}^{+\frac12}dx_1\cdots\int\limits_{-\frac12}^{+\frac12}dx_q\, e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=q}a_{\mu\mu'}x_\mu x_{\mu'}+2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q}x_\mu\left[u_\mu+\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}(m_{\mu'}+g_{\mu'})a_{\mu\mu'}+(h_\mu-n_\mu)\pi i\right]}$$

und weiter, indem man den auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Ausdruck als Factor zum allgemeinen Gliede der Thetareihe hinzunimmt, für die Function $\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(\!(u)\!)_a$ nach passender Vereinigung zusammengehöriger Theile den neuen Ausdruck:

$$(F_1)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(\!(u)\!)_a=\sum_{m_1,\ldots,m_q}^{-\infty,\ldots,+\infty}\;\sum_{m_{q+1},\ldots,m_p}^{-\infty,\ldots,+\infty}\;\sum_{n_1,\ldots,n_q}^{-\infty,\ldots,+\infty}\int\limits_{-\frac12}^{+\frac12}dx_1\cdots\int\limits_{-\frac12}^{+\frac12}dx_q\, e^{\Phi},$$

wobei zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}\Phi=&\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=q}a_{\mu\mu'}(m_\mu+x_\mu+g_\mu)(m_{\mu'}+x_{\mu'}+g_{\mu'})\\&+2\sum_{\mu=1}^{\mu=q}(m_\mu+x_\mu+g_\mu)\left[u_\mu+\sum_{\nu=q+1}^{\nu=p}(m_\nu+g_\nu)a_{\mu\nu}+(h_\mu-n_\mu)\pi i\right]\\&+2\sum_{\mu=1}^{\mu=q}n_\mu g_\mu\pi i+\sum_{\nu=q+1}^{\nu=p}\sum_{\nu'=q+1}^{\nu'=p}a_{\nu\nu'}(m_\nu+g_\nu)(m_{\nu'}+g_{\nu'})+2\sum_{\nu=q+1}^{\nu=p}(m_\nu+g_\nu)(u_\nu+h_\nu\pi i)\end{aligned}$$

gesetzt ist.

Die gewünschte Umformung der Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ wird jetzt dadurch erhalten, dass man auf der rechten Seite der Gleichung (F_1), nachdem man sich von der Statthaftigkeit dieser Operationen überzeugt hat, die an letzter Stelle stehende, auf die Grössen $n_1, \ldots, n_q$ bezügliche Summation mit der an erster Stelle stehenden, auf die Grössen $m_1, \ldots, m_q$ bezüglichen den Platz wechseln lässt, und alsdann die auf die Grössen $m_1, \ldots, m_q$ bezügliche Summation ausführt. Man erhält dann die Gleichung:

$$(F_2) \qquad \vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a = \sum_{n_1, \ldots, n_q}^{-\infty, \ldots, +\infty} \sum_{m_{q+1}, \ldots, m_p}^{-\infty, \ldots, +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_q \, e^{\Phi_0},$$

bei der zur Abkürzung:

$$\Phi_0 = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=q} a_{\mu\mu'} x_\mu x_{\mu'} + 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=q} x_\mu \left[u_\mu + \sum_{\nu=q+1}^{\nu=p} (m_\nu + g_\nu) a_{\mu\nu} - (n_\mu - h_\mu)\pi i \right]$$

$$+ 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=q} n_\mu g_\mu \pi i + \sum_{\nu=q+1}^{\nu=p} \sum_{\nu'=q+1}^{\nu'=p} a_{\nu\nu'} (m_\nu + g_\nu)(m_{\nu'} + g_{\nu'}) + 2 \sum_{\nu=q+1}^{\nu=p} (m_\nu + g_\nu)(u_\nu + h_\nu \pi i)$$

gesetzt ist, und bei der schliesslich noch die q auf die Grössen x bezüglichen Integrationen auszuführen sind.

Um dies Ziel zu erreichen, bringe man Φ_0, indem man zur Abkürzung für $\mu = 1, 2, \ldots, q$:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \left[u_\varkappa + \sum_{\nu=q+1}^{\nu=p} (m_\nu + g_\nu) a_{\varkappa\nu} - (n_\varkappa - h_\varkappa)\pi i \right] \frac{\bar{a}^{(q)}_{\varkappa\mu}}{\Delta^{(q)}_a} = k_\mu$$

setzt und die in Art. 1 definirten Grössen b und v einführt, in die Form:

$$\Phi_0 = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=q} a_{\mu\mu'} (x_\mu + k_\mu)(x_{\mu'} + k_{\mu'}) + \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=q} b_{\mu\mu'} (n_\mu - h_\mu)(n_{\mu'} - h_{\mu'})$$

$$+ 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \sum_{\nu=q+1}^{\nu=p} b_{\mu\nu} (n_\mu - h_\mu)(m_\nu + g_\nu) + \sum_{\nu=q+1}^{\nu=p} \sum_{\nu'=q+1}^{\nu'=p} b_{\nu\nu'} (m_\nu + g_\nu)(m_{\nu'} + g_{\nu'})$$

$$+ 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=q} (n_\mu - h_\mu)(v_\mu + g_\mu \pi i) + 2 \sum_{\nu=q+1}^{\nu=p} (m_\nu + g_\nu)(v_\nu + h_\nu \pi i)$$

$$- \frac{1}{\Delta^{(q)}_a} \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=q} \bar{a}^{(q)}_{\mu\mu'} u_\mu u_{\mu'} + 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=q} g_\mu h_\mu \pi i.$$

Die Ausführung der auf der rechten Seite der Formel (F_2) stehenden Integrationen reducirt sich dann auf die Auswerthung des Integrals:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_q \, e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=q} a_{\mu\mu'} (x_\mu + k_\mu)(x_{\mu'} + k_{\mu'})}.$$

Den auf der rechten Seite im Exponenten stehenden Ausdruck kann man aber, wenn man unter Anwendung der in den Art. 3 und 4 des ersten Abschnitts eingeführten Abkürzungen mit $p_1, p_2, \ldots, p_q$ die Constanten:

$$p_1 = a_{11}^{(1)}, \quad p_2 = \frac{a_{22}^{(2)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad \ldots, \quad p_{q-1} = \frac{a_{q-1\,q-1}^{(q-1)}}{a_{q-2\,q-2}^{(q-2)}}, \quad p_q = \frac{a_{qq}^{(q)}}{a_{q-1\,q-1}^{(q-1)}},$$

mit $l_1, l_2, \ldots, l_q$ die Ausdrücke:

$$l_1 = k_1 + \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}(x_2 + k_2) + \cdots + \frac{a_{1\,q-1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}(x_{q-1} + k_{q-1}) + \frac{a_{1q}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}(x_q + k_q),$$

$$l_2 = k_2 + \frac{a_{23}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}(x_3 + k_3) + \cdots + \frac{a_{2q}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}(x_q + k_q),$$

$$l_{q-1} = k_{q-1} + \frac{a_{q-1\,q}^{(q-1)}}{a_{q-1\,q-1}^{(q-1)}}(x_q + k_q),$$

$$l_q = k_q$$

bezeichnet, in der Form:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=q} a_{\mu\mu'}(x_\mu + k_\mu)(x_{\mu'} + k_{\mu'}) = p_1(x_1 + l_1)^2 + p_2(x_2 + l_2)^2 + \cdots + p_q(x_q + l_q)^2$$

als Summe von q Quadraten linearer Functionen der x darstellen und erhält dann mit Hülfe der Formel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{p(x+l)^2} dx = \sqrt[+]{\frac{-\pi}{p}},$$

bei der p und l complexe, von der Integrationsvariable x unabhängige Grössen bezeichnen, deren erste der Bedingung zu genügen hat, dass ihr reeller Theil wesentlich negativ ist, und bei der die auf der rechten Seite stehende Wurzel so auszuziehen ist, dass ihr reeller Theil positiv wird, für J den Werth:

$$J = \sqrt[+]{\frac{-\pi}{p_1}}\,\sqrt[+]{\frac{-\pi}{p_2}} \cdots \sqrt[+]{\frac{-\pi}{p_q}},$$

wobei endlich das Product der q auf der rechten Seite stehenden Wurzeln, wie unschwer zu zeigen ist, zu der einzigen Wurzel:

$$J = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^q}{\Delta_a^{(q)}}}$$

vereinigt werden kann.

Führt man diesen Werth in die Formel (F_2) ein, ersetzt in neuer Bezeichnung die Summationsbuchstaben $m_{q+1}, m_{q+2}, \ldots, m_p$ durch $n_{q+1}, n_{q+2}, \ldots, n_p$ und definirt Grössen g', h' durch die Gleichungen:

$$g'_\mu = -h_\mu, \quad g'_\nu = g_\nu; \qquad h'_\mu = g_\mu, \quad h'_\nu = h_\nu, \qquad {\scriptstyle (\mu = 1, 2, \ldots, q;\ \nu = q+1, q+2, \ldots, p)}$$

so geht aus der Gleichung (F_2) die neue Gleichung:

$$(F_3)\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^q}{\varDelta_a^{(q)}}}\; e^{-\frac{1}{\varDelta_a^{(q)}} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=q} \overline{a}_{\mu\mu'}^{(q)} u_\mu u_{\mu'}} \cdot e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q} g_\mu h_\mu \pi i}$$

$$\times \sum_{n_1,\ldots,n_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p} b_{\nu\nu'} (n_\nu + g'_\nu)(n_{\nu'} + g'_{\nu'}) + 2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} (n_\nu + g'_\nu)(v_\nu + h'_\nu \pi i)}$$

und hieraus schliesslich, wenn man die auf der rechten Seite stehende p-fach unendliche Reihe durch die mit ihr identische Thetafunction ersetzt, die Gleichung:

$$(\mathrm{III}^{(q)})\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^q}{\varDelta_a^{(q)}}}\; e^{-\frac{1}{\varDelta_a^{(q)}} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=q} \overline{a}_{\mu\mu'}^{(q)} u_\mu u_{\mu'}} \cdot e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q} g_\mu h_\mu \pi i}\; \vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b$$

hervor, welche die gewünschte Umformung der ursprünglichen Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a$ darstellt.

4.

Das Resultat der vorhergehenden Untersuchung lässt sich nun, wie folgt, aussprechen. Die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T_{III^{(q)}} = \left|\begin{array}{cccccc|cccccc}
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\hline
-1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right|,$$

bei der:

$$\mathfrak{a}_{q+1\,q+1} = \mathfrak{a}_{q+2\,q+2} = \cdots = \mathfrak{a}_{pp} = 1, \qquad \mathfrak{b}_{11} = \mathfrak{b}_{22} = \cdots = \mathfrak{b}_{qq} = 1.$$

$$\mathfrak{c}_{11} = \mathfrak{c}_{22} = \cdots = \mathfrak{c}_{pp} = -1, \qquad \mathfrak{d}_{q+1\,q+1} = \mathfrak{d}_{q+2\,q+2} = \cdots = \mathfrak{d}_{pp} = 1$$

ist, während alle übrigen Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ den Werth Null besitzen, bestimmten Transformationsproblems wird durch die Gleichung:

$$(\mathrm{III}^{(q)})\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^q}{\varDelta_a^{(q)}}}\; e^{-U} \cdot e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q} g_\mu h_\mu \pi i}\; \vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b$$

geliefert, bei der:

$$v_\mu = \frac{\pi i}{\varDelta_a^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \bar{a}^{(q)}_{\varkappa\mu} u_\varkappa, \qquad v_\nu = u_\nu - \frac{1}{\varDelta_a^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} a_{\varkappa\nu} \bar{a}^{(q)}_{\varkappa\lambda} u_\lambda;$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, q) \qquad\qquad (\nu = q+1, q+2, \ldots, p)$$

$$b_{\mu\mu'} = \frac{\pi^2}{\varDelta_a^{(q)}} \bar{a}^{(q)}_{\mu\mu'}, \qquad b_{\mu\nu} = \frac{\pi i}{\varDelta_a^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \bar{a}^{(q)}_{\varkappa\mu} a_{\varkappa\nu}, \qquad b_{\nu\nu'} = a_{\nu\nu'} - \frac{1}{\varDelta_a^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} \bar{a}^{(q)}_{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\nu} a_{\lambda\nu'};$$

$$(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, q) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q;\ \nu = q+1, q+2, \ldots, p) \qquad (\nu, \nu' = q+1, q+2, \ldots, p)$$

$$g'_\mu = -h_\mu, \quad h'_\mu = g_\mu, \qquad g'_\nu = g_\nu, \quad h'_\nu = h_\nu;$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, q) \qquad\qquad (\nu = q+1, q+2, \ldots, p)$$

$$V = \frac{1}{\varDelta_a^{(q)}} \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=q} \bar{a}^{(q)}_{\mu\mu'} u_\mu u_{\mu'}$$

ist, während $\varDelta_a^{(q)}$ den Werth der aus Parametern der ursprünglichen Thetafunction gebildeten Determinante:

$$\varDelta_a^{(q)} = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{qq},$$

$\bar{a}^{(q)}_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, q)$ aber die Adjuncte von $a_{\varkappa\lambda}$ in dieser Determinante bezeichnet, und bei der endlich die auf der rechten Seite stehende Wurzel so auszuziehen ist, dass ihr reeller Theil positiv wird.

Durch Umkehrung der Formel $(\mathrm{III}^{(q)})$ erhält man als Lösung des durch die Charakteristik:

$$T^{-1}_{III^{(q)}} = \left|\begin{array}{cccccc} 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & -1 \ldots & 0 & 0 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 & 1 \ldots 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 1 & 0 \ldots & 0 & 0 \ldots 0 \\ \hline 1 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 \ldots 1 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots & 0 & 1 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \ldots 1 \end{array}\right|,$$

bei der:

$$\mathfrak{a}_{q+1\,q+1} = \mathfrak{a}_{q+2\,q+2} = \cdots = \mathfrak{a}_{pp} = 1, \qquad \mathfrak{b}_{11} = \mathfrak{b}_{22} = \cdots = \mathfrak{b}_{qq} = -1,$$
$$\mathfrak{c}_{11} = \mathfrak{c}_{22} = \cdots = \mathfrak{c}_{qq} = 1, \qquad \mathfrak{d}_{q+1\,q+1} = \mathfrak{d}_{q+2\,q+2} = \cdots = \mathfrak{d}_{pp} = 1$$

ist, während alle übrigen Grössen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ den Werth Null besitzen, bestimmten, zu dem obigen inversen Transformationsproblems die Gleichung:

$$(\overline{\mathrm{III}}^{(q)}) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^q}{\varDelta_b^{(q)}}}\, e^{-V} e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q} k_\mu l_\mu \pi i}\, \vartheta\begin{bmatrix} k' \\ l' \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a,$$

bei der jetzt die v als unabhängige Veränderliche, die b als willkürlich gegebene Parameter, die k, l als beliebige reelle Constanten zu betrachten sind, aus denen sich dann die Grössen u, a, k', l' vermittelst der Gleichungen:

$$u_\mu = -\frac{\pi i}{\Delta_b^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \bar{b}_{\varkappa\mu}^{(q)} v_\varkappa, \qquad u_\nu = v_\nu - \frac{1}{\Delta_b^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} b_{\varkappa\nu} \bar{b}_{\varkappa\lambda}^{(q)} v_\lambda ;$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, q) \qquad\qquad (\nu = q+1, q+2, \ldots, p)$$

$$a_{\mu\mu'} = \frac{\pi^2}{\Delta_b^{(q)}} \bar{b}_{\mu\mu'}^{(q)}, \qquad a_{\mu\nu} = -\frac{\pi i}{\Delta_b^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \bar{b}_{\varkappa\mu}^{(q)} b_{\varkappa\nu}, \qquad a_{\nu\nu'} = b_{\nu\nu'} - \frac{1}{\Delta_b^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} \bar{b}_{\varkappa\lambda}^{(q)} b_{\varkappa\nu} b_{\lambda\nu'} ;$$
$$(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, q) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q;\ \nu = q+1, q+2, \ldots, p) \qquad (\nu, \nu' = q+1, q+2, \ldots, p)$$

$$k'_\mu = l_\mu, \qquad l'_\mu = -k_\mu, \qquad\qquad k'_\nu = k_\nu, \qquad l'_\nu = l_\nu$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, q) \qquad\qquad (\nu = q+1, q+2, \ldots, p)$$

zusammensetzen, bei der ferner:

$$V = \frac{1}{\Delta_b^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\varkappa'=1}^{\varkappa'=q} \bar{b}_{\varkappa\varkappa'}^{(q)} v_\varkappa v_{\varkappa'}$$

ist, während $\Delta_b^{(q)}$ den Werth der aus Parametern der Function $\vartheta\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}(\!(v)\!)_b$ gebildeten Determinante:

$$\Delta_b^{(q)} = \Sigma \pm b_{11} b_{22} \ldots b_{qq}.$$

$\bar{b}_{\varkappa\lambda}^{(q)}$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, q)$ aber die Adjuncte von $b_{\varkappa\lambda}$ in dieser Determinante bezeichnet, und bei der endlich die auf der rechten Seite stehende Wurzel so auszuziehen ist, dass ihr reeller Theil positiv wird.

Die dem Werthe $q = p$ entsprechenden Transformationen $(T_{III^{(p)}})$, $(T_{III^{(p)}}^{-1})$ sind von besonderer Wichtigkeit, und es sollen daher die ihnen entsprechenden Formeln zum Schlusse hier noch aufgestellt werden. Zur Ableitung dieser Formeln hat man in den Formeln $(\mathrm{III}^{(q)})$, $(\overline{\mathrm{III}}^{(q)})$ und den darauf bezüglichen Gleichungen $q = p$ zu setzen. Man erhält dann als die Lösungen der durch die Charakteristiken:

$$T_{III^{(p)}} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & \ldots & 0 \\ & 0 & & & \ldots & \\ & & & 0 & \ldots & 1 \\ \hline -1 & \ldots & 0 & & & \\ & \ldots & & & 0 & \\ 0 & \cdots & -1 & & & \end{array}\right| \qquad T_{III^{(p)}}^{-1} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & \ldots & 0 \\ & 0 & & & \ldots & \\ & & & 0 & \cdots & -1 \\ \hline 1 & \ldots & 0 & & & \\ & \ldots & & & 0 & \\ 0 & \ldots & 1 & & & \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsprobleme die Gleichungen:

$$(\mathrm{III}^{(p)}) \qquad \vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^p}{\Delta_a}}\, e^{-U} e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu h_\mu \pi i}\, \vartheta\begin{bmatrix}g'\\h'\end{bmatrix}(\!(v)\!)_b,$$

$$(\overline{\mathrm{III}}^{(p)}) \qquad \vartheta\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}(\!(v)\!)_b = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^p}{\Delta_b}}\, e^{-V} e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} k_\mu l_\mu \pi i}\, \vartheta\begin{bmatrix}k'\\l'\end{bmatrix}(\!(u)\!)_a,$$

bei denen für $\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p$:

$$v_\mu = \frac{\pi i}{\Delta_a} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \bar{a}_{\varkappa\mu} u_\varkappa, \qquad u_\mu = -\frac{\pi i}{\Delta_b} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \bar{b}_{\varkappa\mu} v_\varkappa,$$

$$b_{\mu\mu'} = \frac{\pi^2}{\Delta_a} \bar{a}_{\mu\mu'}, \qquad a_{\mu\mu'} = \frac{\pi^2}{\Delta_b} \bar{b}_{\mu\mu'},$$

$$g'_\mu = -h_\mu, \quad h'_\mu = g_\mu, \qquad k'_\mu = l_\mu, \quad l'_\mu = -k_\mu,$$

$$U = \frac{1}{\Delta_a} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \bar{a}_{\mu\mu'} u_\mu u_{\mu'}, \qquad V = \frac{1}{\Delta_b} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \bar{b}_{\mu\mu'} v_\mu v_{\mu'}$$

ist, während Δ_a, Δ_b die Werthe der aus den Parametern der Thetafunctionen gebildeten Determinanten:

$$\Delta_a = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{pp}, \qquad \Delta_b = \Sigma \pm b_{11} b_{22} \ldots b_{pp},$$

$\bar{a}_{\varkappa\lambda}$, $\bar{b}_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, p)$ aber die Adjuncten von $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$ in diesen Determinanten beziehlich bezeichnen, und die auf der rechten Seite stehende Wurzel in jedem Falle so auszuziehen ist, dass ihr reeller Theil positiv wird.

Fünfter Abschnitt.

Zusammensetzung der allgemeinen linearen Transformation aus elementaren.

1.

In den drei vorhergehenden Abschnitten sind drei Arten von elementaren linearen Transformationen, T_I, T_{II}, T_{III}, gewonnen worden; es soll jetzt nachgewiesen werden, dass jede lineare Transformation T sich aus solchen elementaren zusammensetzen lässt.

Zu dem Ende stelle man in T sowohl die $2p^2$ rationalen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, als auch die $2p^2$ rationalen Zahlen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ als Brüche mit gemeinsamem Nenner dar, indem man für $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\mathfrak{a}_{\mu\nu} = \frac{\alpha_{\mu\nu}}{r}, \qquad \mathfrak{b}_{\mu\nu} = \frac{\beta_{\mu\nu}}{r}, \qquad \mathfrak{c}_{\mu\nu} = \frac{\gamma_{\mu\nu}}{s}, \qquad \mathfrak{d}_{\mu\nu} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{s}$$

setzt, wobei die α, β, γ, δ ganze, r und s positive ganze Zahlen bezeichnen, und der Fall nicht ausgeschlossen ist, dass ein Factor von r gleichzeitig Factor aller Zahlen α, β und ein Factor von s gleichzeitig Factor aller Zahlen γ, δ ist, und ebensowenig der Fall, dass eine der beiden Zahlen r, s oder beide der Einheit gleich sind. Die lineare Transformation T nimmt dann die Gestalt:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & \frac{\beta_{\mu\nu}}{r} \\ \hline \frac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \frac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{array}\right|$$

an, und es bestehen zwischen den ganzen Zahlen α, β, γ, δ die $p(2p-1)$ Relationen:

$$(T_1)\quad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu'} - \alpha_{\varepsilon\mu'}\gamma_{\varepsilon\mu}) = 0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\beta_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'} - \beta_{\varepsilon\mu'}\delta_{\varepsilon\mu}) = 0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'} - \gamma_{\varepsilon\mu}\beta_{\varepsilon\mu'}) = \begin{matrix} rs, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{matrix} \end{gathered} \qquad {\scriptstyle (\mu,\, \mu' = 1,\, 2,\, \ldots,\, p)}$$

oder die damit äquivalenten:

$$(T_2)\quad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\mu\varepsilon}\beta_{\mu'\varepsilon} - \alpha_{\mu'\varepsilon}\beta_{\mu\varepsilon}) = 0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\gamma_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon} - \gamma_{\mu'\varepsilon}\delta_{\mu\varepsilon}) = 0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon} - \beta_{\mu\varepsilon}\gamma_{\mu'\varepsilon}) = \begin{matrix} rs, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu. \end{matrix} \end{gathered} \qquad {\scriptstyle (\mu,\, \mu' = 1,\, 2,\, \ldots,\, p)}$$

Handelt es sich nun um die Zusammensetzung der vorliegenden Transformation T aus elementaren, so hat man zunächst die Werthe der Zahlen β ins Auge zu fassen und in Bezug auf sie die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

Fall I: Die Zahlen β seien sämmtlich der Null gleich;

Fall II: Die Zahlen β seien nicht sämmtlich der Null gleich, und es besitze ihre Determinante $\varDelta_\beta = \Sigma \pm \beta_{11}\beta_{22}\ldots\beta_{pp}$ einen von Null verschiedenen Werth;

Fall III: Die Zahlen β seien nicht sämmtlich der Null gleich, es besitze aber ihre Determinante $\varDelta_\beta$ den Werth Null.

Diese drei Fälle sollen der Reihe nach behandelt werden.

2.

In dem ersten Falle, wo sämmtliche Zahlen β den Werth Null haben, kann man die lineare Transformation T, wenn man die dann stets von Null verschiedene Determinante $\Sigma \pm \delta_{11}\delta_{22}\ldots\delta_{pp}$ der p^2 Zahlen δ mit $\varDelta_\delta$, und für $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p$ die Adjuncte von $\delta_{\mu\nu}$ in dieser Determinante mit $\delta'_{\mu\nu}$ bezeichnet, in die Gestalt:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} s\,\dfrac{\delta'_{\mu\nu}}{\varDelta_\delta} & 0 \\ \hline \dfrac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \dfrac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{array}\right|$$

bringen, wobei die Zahlen γ, δ den $\frac{1}{2}p(p-1)$ Bedingungen:

$$\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\gamma_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon} - \gamma_{\mu'\varepsilon}\delta_{\mu\varepsilon}) = 0. \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

genügen. Ist aber dies geschehen, so lässt sich die Transformation T sofort der Gleichung:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \dfrac{\delta'_{\mu\nu}}{\varDelta_\delta} & 0 \\ \hline 0 & \delta_{\mu\nu} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline \sum\limits_{\varepsilon} \gamma_{\mu\varepsilon}\delta_{\nu\varepsilon} & \begin{matrix} 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} s & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & s \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \frac{1}{s} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \frac{1}{s} \end{matrix} \end{array}\right|$$

entsprechend aus elementaren linearen Transformationen vom Typus T_I, T_{II}, T_I beziehlich zusammensetzen.

Eine jede lineare Transformation, bei der die Zahlen β sämmtlich den Werth Null haben, soll eine singuläre genannt werden. Das vorher gefundene Resultat lässt sich dann so aussprechen, dass jede singuläre Transformation aus drei, oder in speciellen Fällen aus weniger als drei, elementaren singulären Transformationen vom Typus T_I, T_{II} zusammengesetzt werden kann.

3.

Bevor zur Behandlung des zweiten und dritten Falles geschritten wird, soll zur Orientirung Folgendes vorausgeschickt werden.

Setzt man zwei singuläre Transformationen:

$$S' = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}'_{\mu\nu} & 0 \\ \mathfrak{c}'_{\mu\nu} & \mathfrak{d}'_{\mu\nu} \end{vmatrix} \qquad S'' = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}''_{\mu\nu} & 0 \\ \mathfrak{c}''_{\mu\nu} & \mathfrak{d}''_{\mu\nu} \end{vmatrix}$$

mit der zu einer beliebigen Zahl $q \overline{\overline{<}} p$ gehörigen, im Anfange des Art. 4 des vierten Abschnitts angeschriebenen elementaren Transformation $T_{III(q)}$ in der Reihenfolge S', $T_{III(q)}$, S'' zu einer Transformation:

$$\overline{T} = S' \, T_{III(q)} \, S''$$

zusammen, so ist in der Transformation:

$$\overline{T} = \begin{vmatrix} \bar{\mathfrak{a}}_{\mu\nu} & \bar{\mathfrak{b}}_{\mu\nu} \\ \bar{\mathfrak{c}}_{\mu\nu} & \bar{\mathfrak{d}}_{\mu\nu} \end{vmatrix}$$

für jedes μ und ν von 1 bis p:

$$\bar{\mathfrak{a}}_{\mu\nu} = \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \mathfrak{c}'_{\varepsilon\nu} \mathfrak{a}''_{\mu\varepsilon} + \sum_{\eta=q+1}^{\eta=p} \mathfrak{a}'_{\eta\nu} \mathfrak{a}''_{\mu\eta}, \qquad \bar{\mathfrak{b}}_{\mu\nu} = \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \mathfrak{d}'_{\varepsilon\nu} \mathfrak{a}''_{\mu\varepsilon},$$

$$\bar{\mathfrak{c}}_{\mu\nu} = \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \mathfrak{c}'_{\varepsilon\nu} \mathfrak{c}''_{\mu\varepsilon} + \sum_{\eta=q+1}^{\eta=p} \mathfrak{a}'_{\eta\nu} \mathfrak{c}''_{\mu\eta} - \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \mathfrak{a}'_{\varepsilon\nu} \mathfrak{d}''_{\mu\varepsilon} + \sum_{\eta=q+1}^{\eta=p} \mathfrak{c}'_{\eta\nu} \mathfrak{d}''_{\mu\eta}, \quad \bar{\mathfrak{d}}_{\mu\nu} = \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \mathfrak{d}'_{\varepsilon\nu} \mathfrak{c}''_{\mu\varepsilon} + \sum_{\eta=q+1}^{\eta=p} \mathfrak{d}'_{\eta\nu} \mathfrak{d}''_{\mu\eta},$$

und man schliesst daraus, dass die zu der Transformation $\overline{T}$ gehörige Determinante $\Delta_{\bar{\mathfrak{b}}} = \Sigma \pm \bar{\mathfrak{b}}_{11} \bar{\mathfrak{b}}_{22} \ldots \bar{\mathfrak{b}}_{pp}$ immer einen von Null verschiedenen Werth besitzt, wenn $q = p$ ist, dass dagegen, wenn $q < p$ ist, die Determinante $\Delta_{\bar{\mathfrak{b}}}$ den Werth Null besitzt, und zugleich ihre sämmtlichen Unterdeterminanten $p - 1^{\text{ten}}$, $p - 2^{\text{ten}}, \ldots, q + 1^{\text{ten}}$ Grades, nicht aber ihre sämmtlichen Unterdeterminanten q^{ten} Grades verschwinden.

4.

Mit Rücksicht auf das im vorigen Artikel gewonnene Resultat soll jetzt zunächst untersucht werden, ob jede lineare Transformation T, bei der die Determinante $\Delta_{\mathfrak{b}}$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, sich aus zwei passend gewählten singulären Transformationen S', S'' und der Transformation $T_{III(p)}$ der Gleichung:

$$T = S' \, T_{III(p)} \, S''$$

entsprechend zusammensetzen lässt.

Bei der Durchführung dieser Untersuchung findet man ohne Mühe, dass die Transformationen S', S'' auf unendlich viele Weisen so bestimmt werden können, dass

die letzte Gleichung erfüllt ist, und dass man alle der aufgestellten Gleichung genügenden Paare zusammengehöriger Transformationen S', S'' erhält, wenn man in S'' an Stelle des Systems der p^2 Grössen $\mathfrak{d}''$ alle möglichen Systeme von p^2 rationalen Zahlen, deren Determinante $\Delta_{\mathfrak{d}''}$ nicht verschwindet, einführt und dann zu jedem solchen Systeme an Stelle der übrigen in S', S'' vorkommenden Grössen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{c}''$ die aus den Gleichungen:

$$\mathfrak{a}'_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \frac{r\tilde{\beta}_{\varkappa\nu}}{\Delta_\beta} \frac{\tilde{\mathfrak{d}}''_{\varkappa\mu}}{\Delta_{\mathfrak{d}''}}, \qquad \mathfrak{c}'_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \frac{\alpha_{\varkappa\nu}}{r} \mathfrak{d}''_{\varkappa\mu}, \qquad \mathfrak{d}'_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \frac{\beta_{\varkappa\nu}}{r} \mathfrak{d}''_{\varkappa\mu},$$

$$\mathfrak{a}''_{\mu\nu} = \frac{\tilde{\mathfrak{d}}''_{\mu\nu}}{\Delta_{\mathfrak{d}''}}, \qquad \mathfrak{c}''_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} \frac{\delta_{\mu\lambda}}{s} \frac{r\tilde{\beta}_{\varkappa\lambda}}{\Delta_\beta} \frac{\tilde{\mathfrak{d}}''_{\varkappa\nu}}{\Delta_{\mathfrak{d}''}}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

in denen allgemein $\tilde{\beta}_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\beta_{\mu\nu}$ in der Determinante Δ_β, $\tilde{\mathfrak{d}}''_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\mathfrak{d}''_{\mu\nu}$ in der Determinante $\Delta_{\mathfrak{d}''}$ bezeichnet, sich ergebenden rationalen Zahlen treten lässt.

Durch Einführung passend gewählter specieller Werthe für die Grössen $\mathfrak{d}''$ kann man den Transformationen S', S'' eine besonders einfache Form geben. Setzt man speciell $\mathfrak{d}''_{11} = \mathfrak{d}''_{22} = \cdots = \mathfrak{d}''_{pp} = r$, alle übrigen Grössen $\mathfrak{d}''$ aber der Null gleich, so wird:

$$\mathfrak{a}'_{\mu\nu} = \frac{\tilde{\beta}_{\mu\nu}}{\Delta_\beta}, \qquad \mathfrak{c}'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu}, \qquad \mathfrak{d}'_{\mu\nu} = \beta_{\mu\nu},$$

$$\mathfrak{a}''_{\mu\nu} = \begin{cases} \frac{1}{r}, & \text{wenn } \nu = \mu, \\ 0, & \text{wenn } \nu \gtrless \mu, \end{cases} \qquad \mathfrak{c}''_{\mu\nu} = \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \frac{\tilde{\beta}_{\nu\varepsilon}\delta_{\mu\varepsilon}}{s\Delta_\beta}, \qquad \mathfrak{d}''_{\mu\nu} = \begin{cases} r, & \text{wenn } \nu = \mu, \\ 0, & \text{wenn } \nu \gtrless \mu. \end{cases} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

Bildet man die diesen Zahlen entsprechenden Transformationen S', S'', indem man zugleich die mit $\tilde{\beta}_{\mu\nu}$ bezeichnete Adjuncte von $\beta_{\mu\nu}$ in der Determinante Δ_β von jetzt an mit $\beta'_{\mu\nu}$ bezeichnet, und führt dieselben dann zugleich mit den durch die Symbole T, $T_{III(p)}$ bezeichneten Transformationen in die Gleichung $T = S'\,T_{III(p)}\,S''$ ein, so erhält man die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & \frac{\beta_{\mu\nu}}{r} \\ \frac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \frac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\beta'_{\mu\nu}}{\Delta_\beta} & 0 \\ \alpha_{\mu\nu} & \beta_{\mu\nu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & -1 \end{matrix} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{r} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & \frac{1}{r} \end{matrix} & 0 \\ \sum_\varepsilon \frac{\delta_{\mu\varepsilon}\beta'_{\nu\varepsilon}}{s\Delta_\beta} & \begin{matrix} r & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & r \end{matrix} \end{vmatrix}$$

und weiter, indem man auf der rechten Seite sowohl die an erster, wie die an dritter Stelle stehende singuläre Transformation nach dem in Art. 2 Gezeigten aus elementaren Transformationen zusammensetzt, die Gleichung:

$$\left|\begin{array}{c|c} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & \frac{\beta_{\mu\nu}}{r} \\ \hline \frac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \frac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \frac{\beta'_{\mu\nu}}{\Delta_\beta} & 0 \\ \hline 0 & \beta_{\mu\nu} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline \sum\limits_{\varepsilon} \alpha_{\mu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon} & \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & -1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \frac{1}{rs\Delta_\beta} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & \frac{1}{rs\Delta_\beta} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} rs\Delta_\beta & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & rs\Delta_\beta \end{matrix} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline rs\Delta_\beta \sum\limits_{\varepsilon} \delta_{\mu\varepsilon}\beta'_{\nu\varepsilon} & \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} s\Delta_\beta & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & s\Delta_\beta \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \frac{1}{s\Delta_\beta} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & \frac{1}{s\Delta_\beta} \end{matrix} \end{array}\right|,$$

welche die gewünschte Zusammensetzung der gegebenen Transformation aus elementaren darstellt.

5.

Im Anschlusse an das am Ende des Art. 3 ausgesprochenen Resultates soll jetzt weiter untersucht werden, ob jede lineare Transformation T, bei der nicht nur die Determinante Δ_β sondern auch die sämmtlichen Unterdeterminanten $p-1^{\text{ten}}$, $p-2^{\text{ten}}, \ldots, q+1^{\text{ten}}$ Grades von Δ_β verschwinden, von den Unterdeterminanten q^{ten} Grades aber wenigstens eine einen von Null verschiedenen Werth besitzt, sich immer aus zwei passend gewählten singulären Transformationen S', S'' und der Transformation $T_{III(q)}$ der Gleichung:

$$T = S'\, T_{III(q)}\, S''$$

entsprechend zusammensetzen lässt.

Bei der Durchführung dieser Untersuchung mag für das Folgende zunächst vorausgesetzt werden, dass speciell die Unterdeterminante q^{ten} Grades:

$$\nabla_\beta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1q} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{q1} & \beta_{q2} & \cdots & \beta_{qq} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sei. Man findet dann ebenso wie in dem früheren Falle, wo Δ_β von Null verschieden war, dass die Transformationen S', S'' auf unendlich viele Weisen so bestimmt werden können, dass die Gleichung $T = S'\, T_{III(q)}\, S''$ erfüllt ist.

Für den vorliegenden Zweck genügt es, unter den unbegrenzt vielen möglichen Bestimmungen der Grössen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$ eine solche herauszugreifen, bei der die

Transformationen S', S'' eine übersichtliche Form erhalten. Zu dem Ende bezeichne man mit $\grave{\beta}_{\varepsilon\varepsilon'}$ $(\varepsilon, \varepsilon' = 1, 2, \ldots, q)$ die Adjuncte von $\beta_{\varepsilon\varepsilon'}$ in der Determinante ∇_β, setze:

$$\varrho_{\eta\varepsilon} = \frac{1}{\nabla_\beta} \sum_{\varepsilon'=1}^{\varepsilon'=q} \beta_{\varepsilon'\eta} \grave{\beta}_{\varepsilon'\varepsilon}, \qquad \sigma_{\eta\varepsilon} = \frac{1}{\nabla_\beta} \sum_{\varepsilon'=1}^{\varepsilon'=q} \beta_{\eta\varepsilon'} \grave{\beta}_{\varepsilon\varepsilon'} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon = 1, 2, \ldots, q \\ \eta = q+1, q+2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

und definire Grössen ζ, θ, ξ durch die Gleichungen:

$$\zeta_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} - \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \sigma_{\mu\varepsilon} \alpha_{\varepsilon\nu}, \qquad \begin{pmatrix} \mu = q+1, q+2, \ldots, p \\ \nu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{1}{rs} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \sum_{\eta=q+1}^{\eta=p} \frac{\alpha_{\varepsilon\eta} \grave{\beta}_{\varepsilon\nu}}{\nabla_\beta} \left(\delta_{\mu\eta} - \sum_{\varepsilon'=1}^{\varepsilon'=q} \varrho_{\eta\varepsilon'} \delta_{\mu\varepsilon'} \right), \qquad \begin{pmatrix} \mu = q+1, q+2, \ldots, p \\ \nu = 1, 2, \ldots, q \end{pmatrix}$$

$$\xi_{\mu\nu} = \frac{1}{rs} \left(\delta_{\mu\nu} - \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \varrho_{\nu\varepsilon} \delta_{\mu\varepsilon} \right), \qquad \begin{pmatrix} \mu = q+1, q+2, \ldots, p \\ \nu = q+1, q+2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

Grössen φ, ψ durch die Gleichungen:

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{s} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \frac{\delta_{\mu\varepsilon} \grave{\beta}_{\nu\varepsilon}}{\nabla_\beta}, \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots, p \\ \nu = 1, 2, \ldots, q \end{pmatrix}$$

$$\psi_{\mu\nu} = \frac{1}{rs^2} \sum_{\eta=q+1}^{\eta=p} \left(\gamma_{\mu\eta} - \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \sum_{\varepsilon'=1}^{\varepsilon'=q} \frac{\alpha_{\varepsilon\eta} \delta_{\mu\varepsilon'} \grave{\beta}_{\varepsilon\varepsilon'}}{\nabla_\beta} \right) \left(\delta_{\nu\eta} - \sum_{\varepsilon''=1}^{\varepsilon''=q} \varrho_{\eta\varepsilon''} \delta_{\nu\varepsilon''} \right). \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots, p \\ \nu = q+1, q+2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

Eine Bestimmung der gewünschten Art wird dann durch die Gleichungen:

$$S' = \left| \begin{array}{cccccc|cccccc}
\frac{\grave{\beta}_{11}}{\nabla_\beta} & \cdots & \frac{\grave{\beta}_{1q}}{\nabla_\beta} & 0 & \cdots & 0 & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\
\frac{\grave{\beta}_{q1}}{\nabla_\beta} & \cdots & \frac{\grave{\beta}_{qq}}{\nabla_\beta} & 0 & \cdots & 0 & & & & 0 & & \\
\zeta_{q+1\,1} & \cdots & \zeta_{q+1\,q} & \zeta_{q+1\,q+1} & \cdots & \zeta_{q+1\,p} & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\
\zeta_{p1} & \cdots & \zeta_{pq} & \zeta_{p\,q+1} & \cdots & \zeta_{pp} & & & & & & \\
\hline
\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1q} & \alpha_{1\,q+1} & \cdots & \alpha_{1p} & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1q} & \beta_{1\,q+1} & \cdots & \beta_{1p} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_{q1} & \cdots & \alpha_{qq} & \alpha_{q\,q+1} & \cdots & \alpha_{qp} & \beta_{q1} & \cdots & \beta_{qq} & \beta_{q\,q+1} & \cdots & \beta_{qp} \\
\theta_{q+1\,1} & \cdots & \theta_{q+1\,q} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \xi_{q+1\,q+1} & \cdots & \xi_{q+1\,p} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\theta_{p1} & \cdots & \theta_{pq} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \xi_{p\,q+1} & \cdots & \xi_{pp}
\end{array} \right|,$$

$$S'' = \left|\begin{array}{cccccccc|cccccc}
\frac{1}{r} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & & \\
0 & \cdots & \frac{1}{r} & 0 & \cdots & 0 & & & & & & & & \\
\frac{\sigma_{q+1\,1}}{r} & \cdots & \frac{\sigma_{q+1\,q}}{r} & \frac{1}{r} & \cdots & 0 & & & & & 0 & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & & \\
\frac{\sigma_{p\,1}}{r} & \cdots & \frac{\sigma_{p\,q}}{r} & 0 & \cdots & \frac{1}{r} & & & & & & & & \\
\hline
\varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1q} & \psi_{1\,q+1} & \cdots & \psi_{1p} & & & r & \cdots & 0 & -r\sigma_{q+1\,1} & \cdots & -r\sigma_{p\,1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\varphi_{q1} & \cdots & \varphi_{qq} & \psi_{q\,q+1} & \cdots & \psi_{qp} & & & 0 & \cdots & r & -r\sigma_{q+1\,q} & \cdots & -r\sigma_{pq} \\
\varphi_{q+1\,1} & \cdots & \varphi_{q+1\,q} & \psi_{q+1\,q+1} & \cdots & \psi_{q+1\,p} & & & 0 & \cdots & 0 & r & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\varphi_{p\,1} & \cdots & \varphi_{pq} & \psi_{p\,q+1} & \cdots & \psi_{pp} & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & r
\end{array}\right|$$

dargestellt. Aus diesen singulären Transformationen S', S'' und der Transformation $T_{III(q)}$ kann man die gegebene lineare Transformation T in der Form:

$$T = S'\,T_{III(q)}\,S''$$

zusammensetzen, und man kann daher die Transformation T auch, da jede der beiden Transformationen S', S'' als singuläre Transformation sich nach Art. 2 aus elementaren Transformationen vom Typus T_I, T_{II} zusammensetzen lässt, $T_{III(q)}$ aber selbst eine elementare Transformation ist, ohne Mühe aus elementaren Transformationen zusammensetzen.

Auf Grund des gewonnenen Resultates kann man, wie in Art. 5 des ersten Abschnittes gezeigt ist, auch die der Transformation T entsprechende Thetaformel aus Thetaformeln, welche elementaren Transformationen entsprechen, zusammensetzen. Hat man aber im Laufe der Untersuchungen des folgenden Abschnitts schon diejenige Thetaformel aufgestellt, welche der im vorigen Artikel behandelten Transformation T, bei der Δ_β einen von Null verschiedenen Werth besitzt, entspricht, so kann man mit deren Hülfe die der hier vorliegenden Transformation T entsprechende Thetaformel auf bedeutend einfacherem Wege erhalten. Es beruht dies darauf, dass man die vorliegende Transformation T in der Form:

$$T = \widetilde{T}_{III(p-q)}\,\dot{T}$$

aus der Transformation:

$$\tilde{T}_{III(p-q)} = T_{III(p)} T^{-1}_{III(q)} = \left|\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\
\hline
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right|$$

und der Transformation:

$$\dot{T} = \left|\begin{array}{cccccc|cccccc}
\frac{\alpha_{11}}{r} & \dots & \frac{\alpha_{1q}}{r} & \frac{\beta_{1\,q+1}}{r} & \dots & \frac{\beta_{1p}}{r} & \frac{\beta_{11}}{r} & \dots & \frac{\beta_{1q}}{r} & -\frac{\alpha_{1\,q+1}}{r} & \dots & -\frac{\alpha_{1p}}{r} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\alpha_{q1}}{r} & \dots & \frac{\alpha_{qq}}{r} & \frac{\beta_{q\,q+1}}{r} & \dots & \frac{\beta_{qp}}{r} & \frac{\beta_{q1}}{r} & \dots & \frac{\beta_{qq}}{r} & -\frac{\alpha_{q\,q+1}}{r} & \dots & -\frac{\alpha_{qp}}{r} \\
\frac{\alpha_{q+1\,1}}{r} & \dots & \frac{\alpha_{q+1\,q}}{r} & \frac{\beta_{q+1\,q+1}}{r} & \dots & \frac{\beta_{q+1\,p}}{r} & \frac{\beta_{q+1\,1}}{r} & \dots & \frac{\beta_{q+1\,q}}{r} & -\frac{\alpha_{q+1\,q+1}}{r} & \dots & -\frac{\alpha_{q+1\,p}}{r} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\alpha_{p1}}{r} & \dots & \frac{\alpha_{pq}}{r} & \frac{\beta_{p\,q+1}}{r} & \dots & \frac{\beta_{pp}}{r} & \frac{\beta_{p1}}{r} & \dots & \frac{\beta_{pq}}{r} & -\frac{\alpha_{p\,q+1}}{r} & \dots & -\frac{\alpha_{pp}}{r} \\
\hline
\frac{\gamma_{11}}{s} & \dots & \frac{\gamma_{1q}}{s} & \frac{\delta_{1\,q+1}}{s} & \dots & \frac{\delta_{1p}}{s} & \frac{\delta_{11}}{s} & \dots & \frac{\delta_{1q}}{s} & -\frac{\gamma_{1\,q+1}}{s} & \dots & -\frac{\gamma_{1p}}{s} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\gamma_{q1}}{s} & \dots & \frac{\gamma_{qq}}{s} & \frac{\delta_{q\,q+1}}{s} & \dots & \frac{\delta_{qp}}{s} & \frac{\delta_{q1}}{s} & \dots & \frac{\delta_{qq}}{s} & -\frac{\gamma_{q\,q+1}}{s} & \dots & -\frac{\gamma_{qp}}{s} \\
\frac{\gamma_{q+1\,1}}{s} & \dots & \frac{\gamma_{q+1\,q}}{s} & \frac{\delta_{q+1\,q+1}}{s} & \dots & \frac{\delta_{q+1\,p}}{s} & \frac{\delta_{q+1\,1}}{s} & \dots & \frac{\delta_{q+1\,q}}{s} & -\frac{\gamma_{q+1\,q+1}}{s} & \dots & -\frac{\gamma_{q+1\,p}}{s} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\gamma_{p1}}{s} & \dots & \frac{\gamma_{pq}}{s} & \frac{\delta_{p\,q+1}}{s} & \dots & \frac{\delta_{pp}}{s} & \frac{\delta_{p1}}{s} & \dots & \frac{\delta_{pq}}{s} & -\frac{\gamma_{p\,q+1}}{s} & \dots & -\frac{\gamma_{pp}}{s}
\end{array}\right|,$$

bei der die Determinante der p^2 im zweiten Quadranten stehenden Grössen von Null verschieden ist, zusammensetzen kann.

6.

Es erübrigt jetzt noch, im Anschlusse an das im Eingange des vorigen Artikels Bemerkte, den allgemeineren Fall zu behandeln, der durch die Voraussetzung charakterisirt ist, dass die Determinante:

$$\nabla_{\beta}^{(m,n)} = \begin{vmatrix} \beta_{m_1 n_1} & \beta_{m_1 n_2} & \cdots & \beta_{m_1 n_q} \\ \beta_{m_2 n_1} & \beta_{m_2 n_2} & \cdots & \beta_{m_2 n_q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{m_q n_1} & \beta_{m_q n_2} & \cdots & \beta_{m_q n_q} \end{vmatrix},$$

wobei $m_1, m_2, \ldots, m_q$ und $n_1, n_2, \ldots, n_q$ zwei beliebige Combinationen der Zahlen $1, 2, \ldots, p$ zur q^{ten} Classe ohne Wiederholung bedeuten, eine nicht verschwindende Unterdeterminante q^{ten} Grades von Δ_β ist, während alle Unterdeterminanten höheren Grades verschwinden. Dieser allgemeinere Fall kann aber unter Benutzung der im vorigen Artikel für den speciellen Fall gewonnenen Resultate leicht erledigt werden.

Zu dem Ende bezeichne man die von $m_1, m_2, \ldots, m_q$ verschiedenen Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ in der natürlichen Reihenfolge mit $m_{q+1}, m_{q+2}, \ldots, m_p$, ebenso die von $n_1, n_2, \ldots, n_q$ verschiedenen Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ in der natürlichen Reihenfolge mit $n_{q+1}, n_{q+2}, \ldots, n_p$ und definire alsdann zwei elementare lineare Transformationen vom Typus T_I durch die Gleichungen:

$$K' = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \varkappa'_{11} & \cdots & \varkappa'_{1p} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ \varkappa'_{p1} & \cdots & \varkappa'_{pp} & & & \\ \hline & & & \varkappa'_{11} & \cdots & \varkappa'_{1p} \\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \varkappa'_{p1} & \cdots & \varkappa'_{pp} \end{array}\right|, \qquad K'' = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \varkappa''_{11} & \cdots & \varkappa''_{1p} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ \varkappa''_{p1} & \cdots & \varkappa''_{pp} & & & \\ \hline & & & \varkappa''_{11} & \cdots & \varkappa''_{1p} \\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \varkappa''_{p1} & \cdots & \varkappa''_{pp} \end{array}\right|,$$

wobei für jedes ϱ von 1 bis p:

$$\varkappa'_{\varrho n_\varrho} = 1, \qquad \varkappa''_{m_\varrho \varrho} = 1$$

ist, während alle übrigen Grössen $\varkappa'$, $\varkappa''$ den Werth Null besitzen. Bezeichnet man dann die zu den Transformationen K', K'' inversen Transformationen mit K'^{-1}, K''^{-1} und setzt aus diesen und der Transformation T eine neue Transformation:

$$\overline{T} = \left|\begin{array}{c|c} \dfrac{\overline{\alpha}_{\mu\nu}}{r} & \dfrac{\overline{\beta}_{\mu\nu}}{r} \\ \hline \dfrac{\overline{\gamma}_{\mu\nu}}{s} & \dfrac{\overline{\delta}_{\mu\nu}}{s} \end{array}\right|$$

der Gleichung:

$$\overline{T} = K'^{-1}\, T\, K''^{-1}$$

gemäss zusammen, so ist in dieser für jedes μ und ν von 1 bis p:

$$\overline{\alpha}_{\mu\nu} = \alpha_{m_\mu n_\nu}, \quad \overline{\beta}_{\mu\nu} = \beta_{m_\mu n_\nu}, \quad \overline{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{m_\mu n_\nu}, \quad \overline{\delta}_{\mu\nu} = \delta_{m_\mu n_\nu};$$

es hat folglich in der Transformation $\bar{T}$ die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_{\bar{\mathfrak{z}}} = \Sigma \pm \bar{\beta}_{11}\,\bar{\beta}_{22} \ldots \bar{\beta}_{qq}$ der Determinante $\Delta_{\bar{\mathfrak{z}}}$, da sie mit der Determinante $\nabla_{\mathfrak{z}}^{(m,\,n)}$ identisch ist, einen von Null verschiedenen Werth, während alle Unterdeterminanten $q + 1^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, und es lässt sich daher nach dem im vorigen Artikel Bewiesenen die Transformation $\bar{T}$ aus zwei singulären Transformationen $\bar{S}'$, $\bar{S}''$ und der Transformation $T_{III(q)}$ zusammensetzen in der Form:

$$\bar{T} = \bar{S}'\, T_{III(q)}\, \bar{S}''.$$

Aus der die Transformation $\bar{T}$ definirenden Gleichung folgt aber unmittelbar:

$$T = K'\, \bar{T}\, K''$$

und hieraus weiter, indem man $\bar{T}$ durch $\bar{S}'\, T_{III(q)}\, \bar{S}''$ ersetzt und die beiden singulären Transformationen $K'\,\bar{S}'$ zu einer einzigen S', die beiden singulären Transformationen $\bar{S}''\,K''$ zu einer einzigen S'' vereinigt, schliesslich die Gleichung:

$$T = S'\, T_{III(q)}\, S''.$$

Damit ist aber bewiesen, dass die Transformation T, bei der die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_{\mathfrak{z}}^{(m,\,n)}$ der Determinante $\Delta_{\mathfrak{z}}$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, während alle Unterdeterminanten höheren Grades verschwinden, sich aus zwei singulären Transformationen S', S'' und der Transformation $T_{III(q)}$ der Gleichung $T = S'\, T_{III(q)}\, S''$ gemäss zusammensetzen lässt, und sie kann daher auch, da jede der beiden Transformationen S', S'' als singuläre Transformationen sich nach dem in Art. 2 Gezeigten aus elementaren Transformationen vom Typus T_I, T_{II} zusammensetzen lässt, $T_{III(q)}$ aber selbst eine elementare Transformation ist, ohne Mühe aus elementaren Transformationen zusammengesetzt werden.

Überblickt man zum Schlusse noch die in diesem Abschnitte gewonnenen Resultate, so lassen sich dieselben zu folgendem Gesammtresultate zusammmenfassen:

Sieht man von dem Falle ab, in welchem die lineare Transformation T eine singuläre ist, und in welchem zu ihrer Zusammensetzung aus elementaren Transformationen nur Transformationen vom Typus T_I, T_{II} verwendet zu werden brauchen, so erfordert die Zusammensetzung einer linearen Transformation T aus elementaren ausser Transformationen vom Typus T_I, T_{II} immer die einmalige Anwendung einer Transformation vom Typus T_{III}.

Die sämmtlichen linearen Transformationen T zerfallen in $p + 1$ strenge geschiedene Klassen, welche den Typen:

$$S, \quad S'\, T_{III(1)}\, S'', \quad S'\, T_{III(2)}\, S'', \quad \ldots, \quad S'\, T_{III(p)}\, S'',$$

wobei S, S', S'' singuläre Transformationen bezeichnen, entsprechen; in dem Sinne, dass eine Transformation S sich niemals auch in der Form $S'\, T_{III(q)}\, S''$ darstellen lässt, und eine Transformation $S'\, T_{III(q)}\, S''$ weder sich auf eine Transformation S reduciren, noch sich auch in der Form $S'\, T_{III(q')}\, S''$, wobei $q' \gtrless q$ ist, darstellen lässt.

Sechster Abschnitt.

Aufstellung der zu der allgemeinen linearen Transformation gehörigen Thetaformel.

1.

Nachdem im vorigen Abschnitte nachgewiesen worden ist, dass sich jede lineare Transformation T aus elementaren linearen Transformationen, T_I, T_{II}, T_{III}, und daher, mit Rücksicht auf Art. 5 des ersten Abschnitts, auch jede zu einer linearen Transformation gehörige Thetaformel aus den im zweiten, dritten und vierten Abschnitte aufgestellten, den elementarn Transformationen entsprechenden Thetaformeln zusammensetzen lässt, soll jetzt der Aufbau der zur allgemeinen linearen Transformation:

$$T = \left| \begin{array}{c|c} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & \frac{\beta_{\mu\nu}}{r} \\ \hline \frac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \frac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{array} \right|$$

gehörigen Thetaformel in Angriff genommen werden. Auf Grund der im vorigen Abschnitte erhaltenen Resultate hat man dabei in Bezug auf die Transformation T die folgenden vier Fälle zu unterscheiden:

Fall I: Die Zahlen β seien sämmtlich der Null gleich;

Fall II: Die Zahlen β seien nicht sämmtlich der Null gleich, und es besitze ihre Determinante Δ_β einen von Null verschiedenen Werth;

Fall III: Die Zahlen β seien nicht sämmtlich der Null gleich, und es besitze die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_\beta = \Sigma \pm \beta_{11}\beta_{22}\ldots\beta_{qq}$ der Determinante Δ_β einen von Null verschiedenen Werth, während alle Unterdeterminanten $q+1^{\text{ten}}$ Grades von Δ_β verschwinden;

Fall IV: Die Zahlen β seien nicht sämmtlich der Null gleich, und es besitze die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_\beta^{(m,n)} = \Sigma \pm \beta_{m_1 n_1}\beta_{m_2 n_2}\ldots\beta_{m_q n_q}$ der Determinante Δ_β einen von Null verschiedenen Werth, während alle Unterdeterminanten $q+1^{\text{ten}}$ Grades von Δ_β verschwinden.

2.

Der zweite der soeben aufgestellten vier Fälle soll zuerst behandelt werden. In diesem Falle wird die Zusammensetzung der vorliegenden Transformation T aus elementaren durch die am Ende des Art. 4 des vorigen Abschnitts aufgestellte Gleichung geliefert, und um die zu der Transformation T gehörige Thetaformel zu erhalten, hat man die sechs Thetaformeln, welche den sechs auf der rechten Seite der erwähnten Gleichung stehenden elementaren Transformationen entsprechen, aufzustellen und dieselben alsdann nach der in Art. 5 des ersten Abschnitts gegebenen Vorschrift zusammenzusetzen.

Es entspricht nun zunächst der durch die Charakteristik:

$$\left|\begin{array}{c|c} \dfrac{\beta'_{\mu\nu}}{\varDelta_\beta} & 0 \\ \hline 0 & \beta_{\mu\nu} \end{array}\right|$$

bestimmten elementaren Transformation die aus der Formel (I_1) des zweiten Abschnittes für $d_{\mu\nu} = \beta_{\mu\nu}$ unmittelbar hervorgehende Thetaformel:

$$(1)\qquad \bar{\varDelta}_\beta^{\,p-1}\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0,1,\ldots,\bar{\varDelta}_\beta - 1} \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\bar{g}} + \bar{\varrho}}{\varDelta_\beta} \\ \bar{h} \end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)_{b^{(1)}},$$

wobei:

$$\bar{\bar{g}}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \beta'_{\nu\mu} g_\mu, \qquad \bar{\varrho}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \beta'_{\nu\mu} \varrho_\mu, \qquad \bar{h}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \beta_{\nu\mu} h_\mu,$$

$$v_\nu^{(1)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \beta_{\nu\mu} u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'}^{(1)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \beta_{\nu\mu} \beta_{\nu'\mu'} a_{\mu\mu'}. \qquad {\scriptstyle (\nu,\nu'=1,2,\ldots,p)}$$

Der durch die Charakteristik:

$$\left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline \sum_\varepsilon \alpha_{\mu\varepsilon} \beta_{\nu\varepsilon} & \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \end{array}\right|$$

bestimmten elementaren Transformation entspricht ferner die aus der Formel (II) des dritten Abschnitts für $e_{\mu\nu} = \sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \alpha_{\mu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}$ bei passender Wahl der Bezeichnung hervorgehende Thetaformel:

$$(2)\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g^{(1)} \\ h^{(1)} \end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)_{b^{(1)}} = \vartheta\begin{bmatrix} g^{(2)} \\ h^{(2)} \end{bmatrix}(\!(v^{(2)})\!)_{b^{(2)}}\, e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p}\sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu'\varepsilon} g_\nu^{(1)} g_{\nu'}^{(1)} \pi i - \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon} g_\nu^{(1)} \pi i},$$

wobei:

$$g_\nu^{(2)} = g_\nu^{(1)}, \qquad h_\nu^{(2)} = h_\nu^{(1)} + \tfrac{1}{2}\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon} - \sum_{\nu'=1}^{\nu'=p}\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu'\varepsilon}\, g_{\nu'}^{(1)},$$

$$v_\nu^{(2)} = v_\nu^{(1)}, \qquad b_{\nu\nu'}^{(2)} = b_{\nu\nu'}^{(1)} + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu'\varepsilon}\,\pi i. \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

Der durch die Charakteristik:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & \ldots & 0 \\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \ldots & 1 \\ \hline -1 & \ldots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \ldots & -1 & & & \end{array}\right|$$

bestimmten elementaren Transformation entspricht weiter die aus der Formel $(\mathrm{III}^{(p)})$ des vierten Abschnitts bei passender Wahl der Bezeichnung hervorgehende Thetaformel:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g^{(2)} \\ h^{(2)} \end{bmatrix}\!(\!(v^{(2)})\!)_{b^{(2)}} = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^p}{\Delta_{b^{(2)}}}}\; \vartheta\begin{bmatrix} g^{(3)} \\ h^{(3)} \end{bmatrix}\!(\!(v^{(3)})\!)_{b^{(3)}}\, e^{-U} e^{2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} g_\nu^{(2)} h_\nu^{(2)} \pi i}, \tag{3}$$

wobei:

$$g_\nu^{(3)} = -h_\nu^{(2)}, \qquad h_\nu^{(3)} = g_\nu^{(2)},$$

$$v_\nu^{(3)} = \frac{\pi i}{\Delta_{b^{(2)}}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \bar{b}_{\varkappa\nu}^{(2)} v_\varkappa^{(2)}, \qquad b_{\nu\nu'}^{(3)} = \frac{\pi^2}{\Delta_{b^{(2)}}}\, \bar{b}_{\nu\nu'}^{(2)}, \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

$$U = \frac{1}{\Delta_{b^{(2)}}} \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\sum_{\nu'=1}^{\nu'=p} \bar{b}_{\nu\nu'}^{(2)} v_\nu^{(2)} v_{\nu'}^{(2)}$$

ist, während $\Delta_{b^{(2)}}$ den Werth der aus den Parametern $b_{\mu\mu'}^{(2)}$ der auf der linken Seite stehenden Thetafunction gebildeten Determinante $\Sigma \pm b_{11}^{(2)} b_{22}^{(2)} \ldots b_{pp}^{(2)}$, $\bar{b}_{\mu\mu'}^{(2)}$ $(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$ aber die Adjuncte von $b_{\mu\mu'}^{(2)}$ in dieser Determinante bezeichnet, und die auf der rechten Seite stehende Wurzel so auszuziehen ist, dass ihr reeller Theil positiv wird.

Der durch die Charakteristik:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{rs\Delta_\beta} & \cdot & 0 & & & \\ \cdot & & & & 0 & \\ 0 & \cdot & \frac{1}{rs\Delta_\beta} & & & \\ \hline & & & rs\Delta_\beta & \cdot & 0 \\ & 0 & & & \cdot & \\ & & & 0 & \cdot & rs\Delta_\beta \end{array}\right|$$

bestimmten elementaren Transformation entspricht weiter die aus der Formel (I_3) des zweiten Abschnitts für $q = rs\Delta_\beta$ bei passender Wahl der Bezeichnung hervorgehende Thetaformel:

$$(4) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g^{(3)} \\ h^{(3)} \end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(3)}\right)\!\right)_{b^{(3)}} = \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p}^{0,1,\ldots,rs\Delta_\beta - 1} \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{g^{(3)} + \sigma}{rs\Delta_\beta} \\ rs\Delta_\beta h^{(3)} \end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(4)}\right)\!\right)_{b^{(4)}},$$

wobei:

$$v_\nu^{(4)} = rs\Delta_\beta v_\nu^{(3)}, \qquad b_{\nu\nu'}^{(4)} = (rs\Delta_\beta)^2 b_{\nu\nu'}^{(3)}. \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots p)$$

Der durch die Charakteristik:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \cdot & & & 0 & \\ 0 & \ldots & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & \ldots & 0 \\ & rs\Delta_\beta \sum\limits_\varepsilon \delta_{\mu\varepsilon}\beta'_{\nu\varepsilon} & & & \cdot & \\ & & & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right|$$

bestimmten elementaren Transformation entspricht weiter die aus der Formel (II) des dritten Abschnitts für $e_{\mu\nu} = rs\Delta_\beta \sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \delta_{\mu\varepsilon}\beta'_{\nu\varepsilon}$ bei passender Wahl der Bezeichnung hervorgehende Thetaformel:

$$(5) \quad \vartheta\begin{bmatrix} g^{(4)} \\ h^{(4)} \end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(4)}\right)\!\right)_{b^{(4)}} = \vartheta\begin{bmatrix} g^{(5)} \\ h^{(5)} \end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(5)}\right)\!\right)_{b^{(5)}} e^{rs\Delta_\beta \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p}\sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu'\varepsilon} g_\nu^{(4)} g_{\nu'}^{(4)}\pi i - rs\Delta_\beta \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu\varepsilon} g_\nu^{(4)}\pi i}$$

wobei:

$$g_\nu^{(5)} = g_\nu^{(4)}, \qquad h_\nu^{(5)} = h_\nu^{(4)} + \tfrac{1}{2}\, rs\Delta_\beta \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu\varepsilon} - rs\Delta_\beta \sum_{\nu'=1}^{\nu'=p}\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu'\varepsilon} g_{\nu'}^{(4)},$$

$$(\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

$$v_\nu^{(5)} = v_\nu^{(4)}, \qquad b_{\nu\nu'}^{(5)} = b_{\nu\nu'}^{(4)} + rs\Delta_\beta \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu'\varepsilon}\pi i.$$

Endlich entspricht der durch die Charakteristik:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} s\Delta_\beta & \ldots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \ldots & s\Delta_\beta & & & \\ \hline & & & \frac{1}{s\Delta_\beta} & \ldots & 0 \\ & 0 & & & \cdot & \\ & & & 0 & \ldots & \frac{1}{s\Delta_\beta} \end{array}\right|$$

bestimmten elementaren Transformation die aus der Formel $(\bar{\mathrm{I}}_3)$ des zweiten Abschnitts für $q = s\varDelta_\beta$ bei passender Wahl der Bezeichnung hervorgehende Thetaformel:

$$(6) \qquad (s\varDelta_\beta)^p\, \vartheta\begin{bmatrix} g^{(5)} \\ h^{(5)} \end{bmatrix}(\!(v^{(5)})\!)_{b^{(5)}} = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0, 1, \ldots, s\varDelta_\beta - 1} \vartheta\begin{bmatrix} s\varDelta_\beta g^{(5)} \\ \dfrac{h^{(5)} + \varrho}{s\varDelta_\beta} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b\, e^{-2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} g_\nu^{(5)} \varrho_\nu \pi i},$$

wobei:

$$v_\nu = \frac{1}{s\varDelta_\beta}\, v_\nu^{(5)}, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{1}{(s\varDelta_\beta)^2}\, b_{\nu\nu'}^{(5)}. \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

Man setze nun zunächst die Formeln (1), (2), (3), (4) zusammen. Zu dem Ende hat man die in der Gleichung (2) auf der linken Seite vorkommenden Grössen $v^{(1)}$, $b^{(1)}$ als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Gleichung (1) vorkommenden Grössen $v^{(1)}$, $b^{(1)}$ anzusehen und zugleich für jedes ν von 1 bis p: $g_\nu^{(1)} = \frac{1}{\varDelta_\beta}\left(\bar{\bar{g}}_\nu + \bar{\bar{\varrho}}_\nu\right)$, $h_\nu^{(1)} = \bar{h}_\nu$ zu setzen; die auf der linken Seite der Gleichung (3) vorkommenden Grössen $v^{(2)}$, $b^{(2)}$, $g^{(2)}$, $h^{(2)}$ als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Gleichung (2) vorkommenden Grössen $v^{(2)}$, $b^{(2)}$, $g^{(2)}$, $h^{(2)}$, und ebenso die auf der linken Seite der Gleichung (4) vorkommenden Grössen $v^{(3)}$, $b^{(3)}$, $g^{(3)}$, $h^{(3)}$ als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Gleichung (3) vorkommenden Grössen $v^{(3)}$, $b^{(3)}$, $g^{(3)}$, $h^{(3)}$ zu betrachten, sodass alsdann allgemein d. h. für $\varkappa = 2, 3, 4$ die auf der linken Seite der $\varkappa^{\text{ten}}$ Gleichung stehende Thetafunction mit der auf der rechten Seite der $\varkappa - 1^{\text{ten}}$ Gleichung, entweder allein, wie bei den Gleichungen (2), (3), oder als allgemeines Glied einer Summe, wie bei der Gleichung (1), vorkommenden Thetafunction identisch ist. Nachdem dies geschehen, ersetze man in der Gleichung (1) die auf der rechten Seite hinter dem Summenzeichen stehende Thetafunction durch den aus der Gleichung (2) dafür sich ergebenden Ausdruck, nachdem man zuvor in dieser letzten Gleichung die auf der rechten Seite vorkommende Function $\vartheta\begin{bmatrix} g^{(2)} \\ h^{(2)} \end{bmatrix}(\!(v^{(2)})\!)_{b^{(2)}}$ mit Hülfe der Gleichung (3) durch die Function $\vartheta\begin{bmatrix} g^{(3)} \\ h^{(3)} \end{bmatrix}(\!(v^{(3)})\!)_{b^{(3)}}$ und diese letztere mit Hülfe der Gleichung (4) durch Thetafunctionen mit den Argumenten $v^{(4)}$ und den Parametern $b^{(4)}$ ausgedrückt hat. Man erhält dann nach einigen leicht ersichtlichen Umformungen die zu der Transformation:

$$T^{(1,2,3,4)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\alpha_{\mu\nu}}{rs\varDelta_\beta} & \dfrac{\beta_{\mu\nu}}{rs\varDelta_\beta} \\ -rs\beta'_{\mu\nu} & 0 \end{vmatrix}$$

gehörige Thetaformel in der Gestalt:

$$(F_1)\qquad \begin{aligned} \Delta_{\mathfrak{Z}}^{p-1}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a = & \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^p}{r^p \Delta_{\mathfrak{Z}} \Delta_A}}\; e^{-\Phi}\; e^{-\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_{\nu} \frac{\alpha_{\nu\mu}\beta'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\mathfrak{Z}}} g_\mu g_{\mu'}\pi i + 2\sum\limits_{\mu} g_\mu h_\mu \pi i} \\ & \times \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p}^{0,1,\ldots, rs\Delta_{\mathfrak{Z}}-1} G[\sigma_1\,\sigma_2 \ldots \sigma_p]\,\vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g}+\sigma}{rs\Delta_{\mathfrak{Z}}} \\ rs\bar{\bar{g}} \end{bmatrix}((v^{(4)}))_{b^{(4)}}, \end{aligned}$$

wobei:

$$\bar{\bar{g}}_\nu = \sum_\mu \beta'_{\nu\mu} g_\mu, \qquad \hat{g}_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu} + \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu} g_\mu - \beta_{\nu\mu} h_\mu),$$

$$v_\nu^{(4)} = s\Delta_{\mathfrak{Z}}\frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_\mu A'_{\mu\nu} u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'}^{(4)} = \frac{rs^2\Delta_{\mathfrak{Z}}\pi^2}{\Delta_A}\sum_\mu \beta'_{\nu'\mu} A'_{\mu\nu}, \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\Phi = \frac{1}{r\Delta_A}\sum_\mu\sum_{\mu'}\sum_\nu \beta_{\nu\mu} A'_{\mu'\nu} u_\mu u_{\mu'},$$

$$G[\sigma_1\,\sigma_2 \ldots \sigma_p] = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0,1,\ldots,\Delta_{\mathfrak{Z}}-1} e^{-\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_\nu \frac{\alpha_{\nu\mu}\beta'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\mathfrak{Z}}}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i + 2\sum\limits_\mu\sum\limits_\nu \frac{\beta'_{\nu\mu}}{\Delta_{\mathfrak{Z}}}\left(\sigma_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\varepsilon \alpha_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu\varepsilon}\right)\varrho_\mu \pi i}$$

ist, während in Übereinstimmung mit der in Art. 1 des ersten Abschnitts gewählten Bezeichnung:

$$\frac{1}{r}\left(\alpha_{\nu\mu}\pi i + \sum_{\mu'}\beta_{\nu\mu'} a_{\mu\mu'}\right) = A_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

gesetzt und mit Δ_A die stets von Null verschiedene Determinante $\Sigma \pm A_{11}\,A_{22}\ldots A_{pp}$, mit $A'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $A_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet ist.

3.

Die soeben eingeführte, von den ganzen Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ abhängige Summe $G[\sigma_1\,\sigma_2 \ldots \sigma_p]$, für die im Folgenden auch das kürzere Zeichen $G[\sigma]$ angewandt wird, ist im Allgemeinen nicht für jedes Werthesystem $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ von Null verschieden. Es ergibt sich nämlich, dass diejenigen Systeme ganzer Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$, für welche $G[\sigma]$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, identisch sind mit jenen Systemen ganzer Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$, welche den Gleichungen:

$$(E)\qquad \begin{cases} e^{-\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_\nu \frac{\alpha_{\nu\mu}\beta'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\mathfrak{Z}}}\bar{\varrho}_\mu^{(i)}\bar{\varrho}_{\mu'}^{(i)}\pi i + 2\sum\limits_\mu\sum\limits_\nu \frac{\beta'_{\nu\mu}}{\Delta_{\mathfrak{Z}}}\left(\sigma_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\varepsilon \alpha_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu\varepsilon}\right)\bar{\varrho}_\mu^{(i)}\pi i} = 1, \\ i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

in denen $\bar{\varrho}_1^{(i)}, \bar{\varrho}_2^{(i)}, \ldots, \bar{\varrho}_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ die sämmtlichen Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(C) \qquad \sum_{\mu'} \sum_{\nu} \alpha_{\nu 1} \beta'_{\nu\mu'} \bar{\varrho}_{\mu'} \equiv 0 \pmod{\Delta_\beta}, \quad \ldots, \quad \sum_{\mu'} \sum_{\nu} \alpha_{\nu p} \beta'_{\nu\mu'} \bar{\varrho}_{\mu'} \equiv 0 \pmod{\Delta_\beta}$$

bezeichnen, genügen, und weiter, dass diese Zahlensysteme sämmtlich durch das Gleichungensystem:

$$\sigma_\nu = \mathring{\sigma}_\nu + \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu} \varkappa_\mu - \beta_{\nu\mu} \lambda_\mu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

geliefert werden, wenn man darin unter $\mathring{\sigma}_1, \mathring{\sigma}_2, \ldots, \mathring{\sigma}_p$ irgend eine Lösung der Gleichungen (E) versteht, für die $\varkappa$, λ aber der Reihe nach alle möglichen Systeme von je $2p$ ganzen Zahlen setzt. Auch ergibt sich die Gleichung:

$$G\Big[\mathring{\sigma}_1 + \sum_\mu (\alpha_{1\mu} \varkappa_\mu - \beta_{1\mu} \lambda_\mu) \ldots \mathring{\sigma}_p + \sum_\mu (\alpha_{p\mu} \varkappa_\mu - \beta_{p\mu} \lambda_\mu)\Big]$$

$$= e^{\sum\limits_\mu \sum\limits_{\mu'} \sum\limits_\nu \frac{\alpha_{\nu\mu} \beta'_{\nu\mu'}}{\Delta_\beta} \varkappa_\mu \varkappa_{\mu'} \pi i + 2 \sum\limits_\mu \sum\limits_\nu \frac{\beta'_{\nu\mu}}{\Delta_\beta} \left(\mathring{\sigma}_\nu + \frac{1}{2} \sum\limits_\varepsilon \alpha_{\nu\varepsilon} \beta_{\nu\varepsilon}\right) \varkappa_\mu \pi i} \; G[\mathring{\sigma}_1 \ldots \mathring{\sigma}_p].$$

Unter Benutzung dieses Resultates kann man die am Schlusse des Art. 2 aufgestellte Thetaformel, wenn man für $\nu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\sum_\mu (\alpha_{\nu\mu} \varkappa_\mu - \beta_{\nu\mu} \lambda_\mu) = \eta_\nu$$

setzt und mit n die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$\eta_1 \equiv 0 \pmod{rs\Delta_\beta}, \quad \eta_2 \equiv 0 \pmod{rs\Delta_\beta}, \quad \ldots, \quad \eta_p \equiv 0 \pmod{rs\Delta_\beta}$$

bezeichnet, in die reducirte Gestalt:

$$n \Delta_\beta^{p-1} \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^p}{i^p \Delta_\beta \Delta_A}} \; e^{-\Phi} \; e^{-\sum\limits_\mu \sum\limits_{\mu'} \sum\limits_\nu \frac{\alpha_{\nu\mu} \beta'_{\nu\mu'}}{\Delta_\beta} g_\mu g_{\mu'} \pi i + 2 \sum\limits_\mu g_\mu h_\mu \pi i} \; G[\mathring{\sigma}]$$

(F_2)

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p}}^{0, 1, \ldots, rs\Delta_\beta - 1} e^{\sum\limits_\mu \sum\limits_{\mu'} \sum\limits_\nu \frac{\alpha_{\nu\mu} \beta'_{\nu\mu'}}{\Delta_\beta} \varkappa_\mu \varkappa_{\mu'} \pi i + 2 \sum\limits_\mu \sum\limits_\nu \frac{\beta'_{\nu\mu}}{\Delta_\beta} \left(\mathring{\sigma}_\nu + \frac{1}{2} \sum\limits_\varepsilon \alpha_{\nu\varepsilon} \beta_{\nu\varepsilon}\right) \varkappa_\mu \pi i} \; \vartheta \begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g} + \mathring{\sigma} + \eta}{rs\Delta_\beta} \\ rs\bar{\bar{g}} \end{bmatrix} (\!(v^{(4)})\!)_{b^{(4)}}$$

bringen.

4.

Aus der gewonnenen, der Transformation $T^{(1,2,3,4)}$ entsprechenden Thetaformel und den beiden noch übrigen in Art. 2 aufgestellten elementaren Thetaformeln (5), (6) soll jetzt durch passende Verbindung die der vorgelegten linearen Transformation T entsprechende Thetaformel gebildet werden. Zu dem Ende setze man in der Formel (5):

$$g_\nu^{(4)} = \frac{1}{rs\Delta_\beta} (\hat{g}_\nu + \mathring{\sigma}_\nu + \eta_\nu), \qquad h_\nu^{(4)} = rs\bar{\bar{g}}_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

betrachte die in dieser Formel vorkommenden Grössen $v^{(4)}$, $b^{(4)}$ als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Formel (F_2) stehenden Grössen $v^{(4)}$, $b^{(4)}$ und weiter die in der Formel (6) vorkommenden Grössen $g^{(5)}$, $h^{(5)}$, $v^{(5)}$, $b^{(5)}$ als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Formel (5) stehenden, durch die soeben gemachten Festsetzungen mitbestimmten Grössen $g^{(5)}$, $h^{(5)}$, $v^{(5)}$, $b^{(5)}$. Es wird dann die auf der linken Seite der Formel (5) stehende Thetafunction mit der im allgemeinen Gliede der auf der rechten Seite der Formel (F_2) stehenden Summe vorkommenden identisch, ebenso wird die auf der linken Seite der Formel (6) stehende Thetafunction mit der auf der rechten Seite der Formel (5) stehenden identisch, und man erhält, indem man in der Formel (F_2), nach vorhergegangener Multiplication derselben mit $(s\Delta_{\mathfrak{z}})^p$, die auf der rechten Seite hinter dem Summenzeichen stehende Thetafunction durch den aus der Gleichung (5) dafür sich ergebenden Ausdruck ersetzt, nachdem man zuvor in dieser letzten Gleichung an Stelle der auf ihrer rechten Seite stehenden Thetafunction den aus der Gleichung (6) dafür sich ergebenden Ausdruck eingeführt hat, die zu der vorgelegten linearen Transformation T gehörige Thetaformel nach ziemlich weitläufigen Umformungen in der vorläufigen Gestalt:

$$(F_3)\qquad n s^p \Delta_{\mathfrak{z}}^{2p-1}\,\vartheta\begin{bmatrix} g\\ h\end{bmatrix}((u))_a = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^p}{r^p\Delta_{\mathfrak{z}}\Delta_A}}\; e^{-\Phi}\, e^{\psi(g,h)}\, e^{\varphi(\mathring{\sigma})}\, G[\mathring{\sigma}]$$

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p\\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs\Delta_{\mathfrak{z}}-1}\;\sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,s\Delta_{\mathfrak{z}}-1} e^{-\frac{1}{rs}\sum\limits_{\nu}\eta_\nu\eta'_\nu\pi i+\sum\limits_{\mu}\varkappa_\mu\lambda_\mu\pi i-\frac{1}{rs}\sum\limits_{\nu}\sum\limits_{\mu}(\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu-\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta'_\nu)\pi i-\frac{2}{rs}\sum\limits_{\nu}\hat{g}_\nu\eta_\nu\pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{rs\Delta_{\mathfrak{z}}}\sum\limits_{\nu}(\hat{g}_\nu+\mathring{\sigma}_\nu+\eta_\nu)(\varrho_\nu+\bar{\varrho}_\nu)\pi i}\;\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat{g}+\mathring{\sigma}+\eta}{r}\\[2ex] \dfrac{\hat{h}+\eta'}{s}+\dfrac{\varrho+\bar{\varrho}}{s\Delta_{\mathfrak{z}}}\end{bmatrix}((v))_b,$$

wobei:

$$\psi(g,h)=\frac{1}{rs}\sum_{\mu}\sum_{\mu'}\sum_{\nu}(\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu'}g_\mu g_{\mu'}-2\gamma_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu'}g_\mu h_{\mu'}+\beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu'}h_\mu h_{\mu'})\pi i-\frac{1}{rs}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\mu'}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}(\alpha_{\nu\mu'}g_{\mu'}-\beta_{\nu\mu'}h_{\mu'})\pi i,$$

$$\varphi(\mathring{\sigma})=-\sum_{\nu}\sum_{\nu'}\sum_{\varepsilon}\frac{\delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu'\varepsilon}}{rs\Delta_{\mathfrak{z}}}\Big(\mathring{\sigma}_\nu+\tfrac{1}{2}\sum_{\mu}\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\Big)\Big(\mathring{\sigma}_{\nu'}+\tfrac{1}{2}\sum_{\mu'}\alpha_{\nu'\mu'}\beta_{\nu'\mu'}\Big)\pi i-\frac{1}{rs}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\Big(\mathring{\sigma}_\nu+\tfrac{1}{2}\sum_{\mu'}\alpha_{\nu\mu'}\beta_{\nu\mu'}\Big)\pi i.$$

$$v_\nu=\frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_{\mu}A'_{\mu\nu}u_\mu,\qquad b_{\nu\nu'}=\frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_{\mu}A'_{\mu\nu}B_{\mu\nu'},$$

$$\eta_\nu=\sum_{\mu}(\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu-\beta_{\nu\mu}\lambda_\mu),\qquad \eta'_\nu=\sum_{\mu}(-\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu+\delta_{\nu\mu}\lambda_\mu),$$

$$(\nu,\nu'=1,2,\ldots,p)$$

$$\hat{g}_\nu=\tfrac{1}{2}\sum_{\mu}\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}+\sum_{\mu}(\alpha_{\nu\mu}g_\mu-\beta_{\nu\mu}h_\mu),\qquad \hat{h}_\nu=\tfrac{1}{2}\sum_{\mu}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}+\sum_{\mu}(-\gamma_{\nu\mu}g_\mu+\delta_{\nu\mu}h_\mu).$$

$$\bar{\varrho}_\nu=\tfrac{1}{2}rs\Delta_{\mathfrak{z}}\sum_{\varepsilon}\delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu\varepsilon}-\sum_{\nu'}\sum_{\varepsilon}\delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu'\varepsilon}\Big(\mathring{\sigma}_{\nu'}+\tfrac{1}{2}\sum_{\mu}\alpha_{\nu'\mu}\beta_{\nu'\mu}\Big)-rs\sum_{\mu}\beta'_{\nu\mu}\varkappa_\mu-\tfrac{1}{2}\Delta_{\mathfrak{z}}\sum_{\mu}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}$$

ist.

Die auf der rechten Seite der Formel (F_3) stehende Summe erleidet nur eine Umstellung ihrer Summanden und folglich keine Änderung ihres Werthes, wenn man im allgemeinen Gliede derselben die Grössen $\varkappa, \lambda, \varrho$ um irgend welche ganze Zahlen ändert. Auf Grund dieser Eigenschaft kann der letzten Formel eine einfachere Gestalt gegeben werden.

Zu dem Ende ersetze man zunächst, indem man beachtet, dass die Grössen $\bar{\varrho}$, wie unschwer zu zeigen ist, ganzzahlige Werthe besitzen, für jedes ν von 1 bis p ϱ_ν durch $\varrho_\nu - \bar{\varrho}_\nu$.

Um sodann weitere Vereinfachungen der Formel vorzubereiten, bezeichne man mit $\bar{\varkappa}_\mu$, $\bar{\lambda}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ $2p$ ganze Zahlen, welche den p Congruenzen:

$$\bar{\eta}_1 \equiv 0 \pmod{r}, \quad \bar{\eta}_2 \equiv 0 \pmod{r}, \quad \ldots, \quad \bar{\eta}_p \equiv 0 \pmod{r}$$

genügen, und ersetze für jedes μ von 1 bis p $\varkappa_\mu$ durch $\varkappa_\mu + \bar{\varkappa}_\mu$, λ_μ durch $\lambda_\mu + \bar{\lambda}_\mu$ und gleichzeitig für jedes ν von 1 bis p ϱ_ν durch $\varrho_\nu - \varDelta_\beta \bar{\eta}'_\nu$; dabei sind zur Abkürzung mit $\bar{\eta}_\nu$, $\bar{\eta}'_\nu$ die Ausdrücke:

$$\bar{\eta}_\nu = \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu}\bar{\varkappa}_\mu - \beta_{\nu\mu}\bar{\lambda}_\mu), \qquad \bar{\eta}'_\nu = \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu}\bar{\varkappa}_\mu + \delta_{\nu\mu}\bar{\lambda}_\mu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

bezeichnet. Die dadurch entstehende neue Summe unterscheidet sich dann nach dem vorher Bemerkten von der ursprünglichen nur durch die Anordnung der Glieder; setzt man daher für das System der $2p$ ganzen Zahlen $\bar{\varkappa}_1, \ldots, \bar{\varkappa}_p, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_p$ der Reihe nach die sämmtlichen Normallösungen des Congruenzensystems:

$$s\varDelta_\beta\bar{\eta}_1 \equiv 0 \pmod{rs\varDelta_\beta}, \quad s\varDelta_\beta\bar{\eta}_2 \equiv 0 \pmod{rs\varDelta_\beta}, \quad \ldots, \quad s\varDelta_\beta\bar{\eta}_p \equiv 0 \pmod{rs\varDelta_\beta},$$

bezeichnet die Anzahl dieser Lösungen mit n' und addirt die n' so entstandenen Summen, so erhält man eine neue Summe, welche das n'-fache der ursprünglichen ist. Auf diese Weise geht aus der obigen Thetaformel die neue:

$$(F_4) \qquad n\, n'\, s^p \varDelta_\beta^{-2p-1}\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^p}{r^p \varDelta_\beta \varDelta_A}}\; e^{-\Phi}\, e^{\psi(g,h)}\, e^{\varphi(\mathring{\sigma})} G[\mathring{\sigma}]$$

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs\varDelta_\beta-1} \; \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0,1,\ldots,s\varDelta_\beta-1} e^{-\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu \eta'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu \lambda_\mu \pi i - \frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \sum\limits_\mu (\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu - \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta'_\nu)\pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \hat{g}_\nu \eta'_\nu \pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{rs\varDelta_\beta}\sum\limits_\nu (\hat{g}_\nu + \mathring{\sigma}_\nu + \eta_\nu)\varrho_\nu \pi i}\; \bar{H}\begin{bmatrix} \frac{\varrho_1}{\varDelta_\beta} & \cdots & \frac{\varrho_p}{\varDelta_\beta} \end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\dot{g} + \mathring{\sigma} + \eta}{r} \\ \frac{\dot{h} + \eta'}{s} + \frac{\varrho}{s\varDelta_\beta} \end{bmatrix}(\!(v)\!),$$

hervor, bei der:

$$\bar{H}\begin{bmatrix} \frac{\varrho_1}{\varDelta_\beta} & \cdots & \frac{\varrho_p}{\varDelta_\beta} \end{bmatrix} = \sum_{\substack{\bar{\varkappa}_1, \ldots, \bar{\varkappa}_p \\ \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_p}}^{0,1,\ldots,rs\varDelta_\beta-1}{}' \; e^{\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \bar{\eta}_\nu \bar{\eta}'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \bar{\varkappa}_\mu \bar{\lambda}_\mu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \left[\left(\frac{\varrho_\nu}{\varDelta_\beta} + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}_\nu - \left(\mathring{\sigma}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}'_\nu\right]\pi i}$$

ist; dabei deutet der Accent am Summenzeichen an, dass zur Bildung dieser Summe an Stelle des Systems der $2p$ Grössen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ von den $(rs\varDelta_\beta)^{2p}$ Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, rs\varDelta_\beta - 1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung nur diejenigen, n' an der Zahl, treten sollen, für welche die p Grössen $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots, \bar{\eta}_p$ sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind.

5.

Die soeben eingeführte, von den ganzen Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ abhängige Summe $\bar{H}\begin{bmatrix} \frac{\varrho_1}{\varDelta_\beta} & \cdots & \frac{\varrho_p}{\varDelta_\beta} \end{bmatrix}$, für die im Folgenden auch das kürzere Zeichen $\bar{H}\begin{bmatrix} \frac{\varrho}{\varDelta_\beta} \end{bmatrix}$ angewandt wird, ist im Allgemeinen nicht für alle Werthesysteme $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ von Null verschieden. Es ergibt sich nämlich zunächst, dass $\bar{H}\begin{bmatrix} \frac{\varrho}{\varDelta_\beta} \end{bmatrix}$ immer verschwindet, wenn die ganzen Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ nicht sämmtlich durch $\varDelta_\beta$ theilbar sind. Ist aber:

$$\varrho_1 = \varDelta_\beta \tau_1, \quad \varrho_2 = \varDelta_\beta \tau_2, \quad \ldots, \quad \varrho_p = \varDelta_\beta \tau_p,$$

wobei $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ ganze Zahlen sind, so geht $\bar{H}\begin{bmatrix} \frac{\varrho}{\varDelta_\beta} \end{bmatrix}$ in $\varDelta_\beta^{2p} H[\tau]$ über, wenn man mit $H[\tau]$ die Summe:

$$H[\tau] = \sum_{\substack{\varkappa_1, \ldots \varkappa_p \\ \lambda_1, \ldots \lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs-1}{}' e^{\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu \eta'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu \lambda_\mu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \left[\left(\tau_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\eta_\nu - \left(\sigma_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\eta'_\nu\right]\pi i}$$

bezeichnet, bei der der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass an Stelle des Systems der $2p$ Grössen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ von den $(rs)^{2p}$ Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, rs - 1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung nur diejenigen treten sollen, für welche die p Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ sämmtlich durch r theilbar sind. Für diese neue Summe ergibt sich nun aber, dass diejenigen Systeme ganzer Zahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$, für welche $H[\tau]$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, identisch sind mit jenen Systemen ganzer Zahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$, welche den Gleichungen:

$$(E) \quad \left\{ \begin{aligned} & e^{\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \bar{\eta}_\nu^{(i)} \bar{\eta}_\nu^{\prime(i)} \pi i + \sum\limits_\mu \bar{\varkappa}_\mu^{(i)} \bar{\lambda}_\mu^{(i)} \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \left[\left(\tau_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}_\nu^{(i)} - \left(\sigma_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}_\nu^{\prime(i)}\right]\pi i} = 1, \\ & \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, \bar{m}, \end{aligned} \right.$$

genügen, in denen zur Abkürzung:

$$\sum_\mu \left(\alpha_{\nu\mu}\bar{\varkappa}_\mu^{(i)} - \beta_{\nu\mu}\bar{\lambda}_\mu^{(i)}\right) = \bar{\eta}_\nu^{(i)}, \qquad \sum_\mu \left(-\gamma_{\nu\mu}\bar{\varkappa}_\mu^{(i)} + \delta_{\nu\mu}\bar{\lambda}_\mu^{(i)}\right) = \bar{\eta}_\nu^{\prime(i)} \qquad \left(\begin{smallmatrix} i = 1, 2, \ldots, \bar{m} \\ \nu = 1, 2, \ldots, p \end{smallmatrix}\right)$$

gesetzt ist, und in denen $\bar{\varkappa}_1^{(i)}, \ldots, \bar{\varkappa}_p^{(i)}, \bar{\lambda}_1^{(i)}, \ldots, \bar{\lambda}_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \bar{m})$ diejenigen Normallösungen $\bar{\varkappa}_1, \ldots, \bar{\varkappa}_p, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_p$ des Congruenzensystems:

$$(C)\qquad s\eta_1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ rs), \quad s\eta_2 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ rs), \ \ldots, \ s\eta_p \equiv 0 \ (\text{mod.}\ rs)$$

sind, welche der weiteren Bedingung genügen, dass durch sie:

$$(C')\qquad \sum_\nu \eta_\nu \eta'_\nu \equiv 0 \ (\text{mod.}\ rs)$$

wird für jedes System von $2p$ ganzen Zahlen $\varkappa$, λ, für welches die p Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ sämmtlich durch r theilbar sind; und weiter findet man, dass diese Zahlensysteme $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ sämmtlich durch das Gleichungensystem:

$$\tau_\nu = \mathring{\tau}_\nu + s\xi_\nu + \bar{\eta}'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p)$$

geliefert werden, wenn man darin unter $\mathring{\tau}_1, \mathring{\tau}_2, \ldots, \mathring{\tau}_p$ irgend eine Lösung der Gleichungen (E) versteht, für die ξ alle möglichen ganzen Zahlen, für die $\bar{\varkappa}$, $\bar{\lambda}$ aber alle diejenigen Systeme ganzer Zahlen, welche den Congruenzen:

$$\bar{\eta}_1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ r), \quad \bar{\eta}_2 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ r), \ \ldots, \ \bar{\eta}_p \equiv 0 \ (\text{mod.}\ r)$$

genügen, setzt. Auch ergibt sich die Gleichung:

$$H[\mathring{\tau}_1 + s\xi_1 + \bar{\eta}'_1 \ldots \mathring{\tau}_p + s\xi_p + \bar{\eta}'_p]$$

$$= e^{-\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \bar{\eta}_\nu \bar{\eta}'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \bar{\varkappa}_\mu \bar{\lambda}_\mu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \left[\left(\mathring{\tau}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}_\nu - \left(\mathring{\sigma}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}'_\nu\right]\pi i} H[\mathring{\tau}_1 \ldots \tau_p].$$

6.

Unter Benutzung des Resultates des letzten Artikels kann man nun endlich die zu der linearen Transformation:

$$T = \begin{vmatrix} \dfrac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & \dfrac{\beta_{\mu\nu}}{r} \\ \dfrac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \dfrac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{vmatrix},$$

bei der $\varDelta_\beta \gtrless 0$ ist, gehörige Thetaformel in die definitive Gestalt:

$$(\mathfrak{T})\qquad n_1 n_2 (rs)^p \bar{\varDelta}_\beta^{-p-1}\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^p r^p}{\varDelta_\beta \varDelta_A}}\, e^{-\Phi} e^{\psi(g,h)} e^{\varphi(\mathring{\sigma})} G[\mathring{\sigma}]\, H[\tau]$$

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs-1} e^{-\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu \eta'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu \lambda_\mu \pi i - \frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \sum\limits_\mu (\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu - \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta'_\nu)\pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \hat{g}_\nu \eta'_\nu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu (g_\nu + \mathring{\sigma}_\nu + \eta_\nu)\mathring{\tau}_\nu \pi i}\, \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{g + \sigma + \eta}{r} \\ \dfrac{h + \tau + \eta'}{s} \end{bmatrix}((v))_b$$

bringen. In dieser Formel ist zunächst:

$$v_\nu = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum_\mu A'_{\mu\nu} u_\mu, \qquad h_{\nu\nu'} = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum A'_{\mu\nu} B_{\mu\nu'}, \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \dots, p)$$

wenn man mit $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ die Ausdrücke:

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{r}\left(\alpha_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \beta_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}\right), \qquad B_{\mu\nu} = \frac{1}{s}\left(\gamma_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \delta_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}\right), \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, p)$$

mit Δ_A die Determinante $\Sigma \pm A_{11} A_{22} \dots A_{pp}$ und mit $A'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $A_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet; es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\eta_\nu = \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu - \beta_{\nu\mu}\lambda_\mu), \qquad \eta'_\nu = \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu + \delta_{\nu\mu}\lambda_\mu),$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, p)$$

$$g_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu} + \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu} g_\mu - \beta_{\nu\mu} h_\mu), \quad h_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu} + \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu} g_\mu + \delta_{\nu\mu} h_\mu),$$

$$\Phi = \frac{1}{r\Delta_A} \sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu \beta_{\nu\mu} A'_{\mu'\nu} u_\mu u_{\mu'},$$

$$\Psi(g, h) = \frac{1}{rs} \sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu (\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu'} g_\mu g_{\mu'} - 2\gamma_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu'} g_\mu h_{\mu'} + \beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu'} h_\mu h_{\mu'})\pi i$$
$$- \frac{1}{rs} \sum_\nu \sum_\mu \sum_{\mu'} \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}(\alpha_{\nu\mu'} g_{\mu'} - \beta_{\nu\mu'} h_{\mu'})\pi i,$$

$$\varphi(\sigma) = -\sum_\nu \sum_{\nu'} \sum_\varepsilon \frac{\delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu'\varepsilon}}{rs\Delta_\beta}\left(\mathring{\sigma}_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\left(\mathring{\sigma}_{\nu'} + \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu'\mu}\beta_{\nu'\mu}\right)\pi i$$
$$- \frac{1}{rs}\sum_\nu \sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\left(\sigma_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu'} \alpha_{\nu\mu'}\beta_{\nu\mu'}\right)\pi i,$$

$$G[\sigma] = \sum_{\varrho_1, \dots, \varrho_p}^{0, 1, \dots, \Delta_\beta - 1} e^{-\sum\limits_\mu \sum\limits_{\mu'} \sum\limits_\nu \frac{\alpha_{\nu\mu}\beta'_{\nu\mu'}}{\Delta_\beta}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i + 2\sum\limits_\mu \sum\limits_\nu \frac{\beta'_{\nu\mu}}{\Delta_\beta}\left(\mathring{\sigma}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\varepsilon \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right)\varrho_\mu \pi i},$$

wobei Δ_β die Determinante $\Sigma \pm \beta_{11}\beta_{22} \dots \beta_{pp}$ und $\beta'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\beta_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet, und unter $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ eine beliebige Lösung des in Art. 3 aufgestellten Gleichungensystems (E) zu verstehen ist; es ist weiter:

$$H[\tau] = \sum_{\substack{\varkappa_1, \dots, \varkappa_p \\ \lambda_1, \dots, \lambda_p}}^{0, 1, \dots, rs - 1}{}' e^{\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu\eta'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu\lambda_\mu \pi i - \frac{2}{r}\sum\limits_\nu \left[\left(\tau_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\eta'_\nu - \left(\mathring{\sigma}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\eta_\nu\right]\pi i},$$

wobei der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass an Stelle des Systems der $2p$ Grössen $\varkappa_1, \dots, \varkappa_p$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ von den $(rs)^{2p}$ Variationen der Elemente $0, 1, \dots, rs - 1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung nur diejenigen treten sollen, für welche die p Zahlen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p$ sämmtlich durch r theilbar sind, und unter $\mathring{\tau}_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ irgend eine Lösung des in Art. 5 aufgestellten Gleichungensystems (E) zu verstehen ist; es bezeichnen weiter:

n_1 die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$s\eta_1 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad s\eta_2 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \ldots, \quad s\eta_p \equiv 0 \pmod{rs},$$
$$r\eta_1' \equiv 0 \pmod{rs}, \quad r\eta_2' \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \ldots, \quad r\eta_p' \equiv 0 \pmod{rs},$$

n_2 die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$\eta_1 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \eta_2 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \ldots, \quad \eta_p \equiv 0 \pmod{rs};$$

es ist endlich die auf der rechten Seite stehende Wurzel so auszuziehen, dass ihr reeller Theil positiv wird.

Die Anzahlen n_1, n_2', sowie die Zahlen $\mathring{\sigma}$, $\mathring{\tau}$ hängen von den Zahlenwerthen der α, β, γ, δ ab und müssen in jedem Falle besonders bestimmt werden.

7.

Es soll jetzt der erste der in Art. 1 aufgestellten Fälle behandelt werden, der dadurch charakterisirt ist, dass bei der vorgelegten linearen Transformation alle Zahlen β den Werth Null besitzen, oder, was dasselbe, diese Transformation eine singuläre ist. Nachdem man in den vorhergehenden Artikeln diejenige Thetaformel gewonnen hat, welche der allgemeinen linearen Transformation im Falle $\varDelta_\beta \gtrless 0$ entspricht, erhält man die der vorliegenden singulären Transformation:

$$S = \begin{vmatrix} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & 0 \\ \frac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \frac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{vmatrix}$$

zugehörige Thetaformel auf die einfachste Weise, indem man diese Transformation der Gleichung:

$$S = T_{III^{(p)}} \dot{T}$$

gemäss, aus den beiden Transformationen:

$$T_{III^{(p)}} = \begin{vmatrix} 0 & \begin{matrix} 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & \ldots & 0 \\ \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots & -1 \end{matrix} & 0 \end{vmatrix} \qquad \dot{T} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\alpha_{\mu\nu}}{r} \\ \frac{\delta_{\mu\nu}}{s} & -\frac{\gamma_{\mu\nu}}{s} \end{vmatrix}$$

und entsprechend die zu ihr gehörige Thetaformel aus den beiden zu den Transformationen $T_{III^{(p)}}$, $\dot{T}$ gehörigen Formeln in der früher angegebenen Weise zusammensetzt, indem man beachtet, dass die zu der fundamentalen Transformation $T_{III^{(p)}}$ gehörige Thetaformel schon im vierten Abschnitte aufgestellt wurde, die der Transformation $\dot{T}$ entsprechende Thetaformel aber, da bei ihr die Determinante $\varDelta_{\dot{\beta}} = \Sigma \pm \dot{\beta}_{11} \dot{\beta}_{22} \ldots \dot{\beta}_{pp} = (-1)^p \Sigma \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \ldots \alpha_{pp}$ einen von Null verschiedenen

Werth besitzt, aus der im vorigen Artikel aufgestellten Hauptformel durch passende Verfügung über die dort vorkommenden Zahlen α, β, γ, δ ohne Mühe abgeleitet werden kann. Auf diese Weise erhält man, nach Durchführung der möglichen Vereinfachungen, die der vorgelegten singulären Transformation S entsprechende Thetaformel in der Gestalt:

$$(\mathfrak{S})\qquad n s^p \varDelta_\alpha\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = e^{\psi(g,h)} H'[\tau]$$

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs-1} e^{-\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu \eta'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu \lambda_\mu \pi i - \frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \sum\limits_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \dot{g}_\nu \eta'_\nu \pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{rs}\sum\limits_\nu (\dot{g}_\nu + \eta_\nu)\overset{\circ}{\tau}_\nu \pi i}\, \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\dot{g} + \eta}{r} \\[2mm] \dfrac{\grave{h} + \overset{\circ}{\tau} + \eta'}{s} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b .$$

In dieser Formel ist zunächst:

$$v_\nu = \frac{1}{s}\sum_\mu \delta_{\nu\mu} u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{1}{s^2}\sum_\mu \delta_{\nu\mu}\Big(\gamma_{\nu'\mu}\pi i + \sum_{\mu'} \delta_{\nu'\mu'} a_{\mu\mu'}\Big); \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots p)$$

es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\eta_\nu = \sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu, \qquad \eta'_\nu = \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu + \delta_{\nu\mu}\lambda_\mu),$$

$$\dot{g}_\nu = \sum_\mu \alpha_{\nu\mu} g_\mu, \qquad \grave{h}_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu} + \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu} g_\mu + \delta_{\nu\mu} h_\mu), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p)$$

$$\psi(g, h) = \frac{1}{rs}\sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu \alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu'} g_\mu g_{\mu'} \pi i - \frac{1}{rs}\sum_\nu \sum_\mu \sum_{\mu'} \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\alpha_{\nu\mu'} g_{\mu'} \pi i;$$

es ist weiter:

$$H'[\overset{\circ}{\tau}] = \sum_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p}^{0,1,\ldots,rs-1}{}' e^{\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu \grave{\eta}_\nu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \left(\overset{\circ}{\tau}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\eta_\nu \pi i},$$

wobei der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass an Stelle des Systems der p Grössen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$ von den $(rs)^p$ Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, rs-1$ zur p^{ten} Classe mit Wiederholung nur diejenigen treten sollen, für welche die p Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ sämmtlich durch r theilbar sind, wobei ferner zur Abkürzung:

$$\grave{\eta}_\nu = -\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots p)$$

gesetzt ist, und wobei endlich $\overset{\circ}{\tau}_1, \overset{\circ}{\tau}_2, \ldots, \overset{\circ}{\tau}_p$ eine beliebige Lösung des Gleichungensystems:

$$(\bar{E})\qquad \left\{ \begin{array}{l} e^{\frac{1}{rs}\sum\limits_{\nu} \bar{\eta}_\nu^{(i)} \bar{\eta}_\nu^{\prime(i)} \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_{\nu}\left(\tau_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_{\mu}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}_\nu^{(i)}\pi i} = 1, \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, \bar{m}, \end{array} \right.$$

bezeichnet, in dem zur Abkürzung:

$$\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\bar{\varkappa}_\mu^{(i)} = \bar{\eta}_\nu^{(i)}, \qquad - \sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\bar{\varkappa}_\mu^{(i)} = \bar{\eta}_\nu^{\prime(i)} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \bar{m} \\ \nu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

gesetzt ist, und in denen $\bar{\varkappa}_1^{(i)}, \ldots, \bar{\varkappa}_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \bar{m})$ diejenigen Normallösungen $\bar{\varkappa}_1, \ldots, \bar{\varkappa}_p$ des Congruenzensystems:

$$(\bar{C})\qquad s\bar{\eta}_1 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad s\bar{\eta}_2 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \ldots, \quad s\bar{\eta}_p \equiv 0 \pmod{rs}$$

sind, welche der weiteren Bedingung genügen, dass durch sie:

$$(\bar{C}')\qquad \sum_\nu \bar{\eta}_\nu \eta'_\nu \equiv 0 \pmod{rs}$$

wird für jedes System von p ganzen Zahlen $\varkappa$, für welches die p Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ sämmtlich durch r theilbar sind; es bezeichnet endlich Δ_α die Determinante $\Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{pp}$ und n die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$\begin{array}{l} s\eta_1 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad s\eta_2 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \ldots, \quad s\eta_p \equiv 0 \pmod{rs}, \\ r\eta'_1 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad r\eta'_2 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \ldots, \quad r\eta'_p \equiv 0 \pmod{rs}. \end{array}$$

Diese Anzahl n, sowie die Zahlen τ hängen von den Zahlenwerthen der α, γ, δ ab und müssen in jedem Falle besonders bestimmt werden.

8.

Es soll jetzt der dritte der im ersten Artikel aufgestellten vier Fälle behandelt werden, der dadurch charakterisirt ist, dass bei der vorgelegten linearen Transformation T die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_\beta = \Sigma \pm \beta_{11}\beta_{22}\ldots\beta_{qq}$ der Determinante Δ_β einen von Null verschiedenen Werth besitzt, während alle Unterdeterminanten höheren Grades verschwinden. Wie am Schlusse des Art. 5 des fünften Abschnitts gezeigt ist, kann man in diesem Falle die Transformation T aus den beiden dort angeschriebenen Transformationen $\tilde{T}_{III^{(p-q)}}$, $\dot{T}$ in der Form:

$$T = \tilde{T}_{III^{(p-q)}}\,\dot{T}$$

zusammensetzen, und man kann daher auch die zur Transformation T gehörige Thetaformel aus den beiden, zu den Transformationen $\tilde{T}_{III^{(p-q)}} = T_{III^{(p)}}\,T^{-1}_{III^{(q)}}$, $\dot{T}$ gehörigen Thetaformeln zusammensetzen, von denen die erste aus den Formeln des vierten Abschnitts erhalten wird, die zweite aber, da bei der Transformation $\dot{T}$ die Determinante $\Delta_{\dot{\beta}}$ von Null verschieden ist, aus der Hauptformel des Art. 6 bei passender Verfügung über die dort vorkommenden α, β, γ, δ hervorgeht. Man erhält auf diese Weise die der vorliegenden Transformation T entsprechende Thetaformel in der Gestalt:

$$(\mathfrak{T}') \qquad n_1 n_2 (rs)^p \dot{\Delta}_{\dot\beta}^{p-1}\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{i^{p-q}(-\pi)^p r^p}{\Delta_{\dot\beta}\Delta_A}}\; e^{-\Phi}\, e^{\psi(g,h)}\, e^{\dot\varphi(\mathring\sigma)}\, \dot G[\mathring\sigma]\, H[\mathring\tau]$$

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs-1} e^{-\frac{1}{rs}\sum\limits_{\nu} \eta_\nu \eta'_\nu \pi i + \sum\limits_{\mu}\varkappa_\mu \lambda_\mu \pi i - \frac{1}{rs}\sum\limits_{\nu}\sum\limits_{\mu}(\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\lambda_\mu - \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\lambda'_\mu)\pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{rs}\sum\limits_{\nu}\dot g_\nu \eta'_\nu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_{\nu}(\dot g_\nu + \mathring\sigma_\nu + \eta_\nu)\mathring\tau_\nu \pi i}\cdot \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\dot g + \mathring\sigma + \eta}{r} \\[2ex] \dfrac{\hat h + \mathring\tau + \eta'}{s} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b ,$$

bei der v, b, η, η', $\dot g$, $\hat h$, Φ, $\psi(g, h)$, $H[\mathring\tau]$, n_1, n_2 dieselbe Bedeutung haben wie in Art. 6, und bei der:

$$\dot\varphi(\mathring\sigma) = -\sum_{\nu}\sum_{\nu'}\sum_{\varepsilon}\frac{\dot\delta_{\nu\varepsilon}\dot\beta'_{\nu'\varepsilon}}{rs\Delta_{\dot\beta}}\left(\mathring\sigma_\nu + \tfrac12\sum_{\mu}\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\left(\mathring\sigma_{\nu'} + \tfrac12\sum_{\mu'}\alpha_{\nu'\mu'}\beta_{\nu'\mu'}\right)\pi i$$

$$-\frac{1}{rs}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\left(\mathring\sigma_\nu + \tfrac12\sum_{\mu'}\alpha_{\nu\mu'}\beta_{\nu\mu'}\right)\pi i .$$

$$\dot G[\mathring\sigma] = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\Delta_{\dot\beta}-1} e^{-\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_{\nu}\frac{\dot\alpha_{\nu\mu}\dot\beta'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\dot\beta}}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i + 2\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu}\frac{\dot\beta'_{\nu\mu}}{\Delta_{\dot\beta}}\left(\mathring\sigma_\nu + \frac12\sum\limits_{\varepsilon}\alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right)\varrho_\mu\pi i}$$

ist, wobei:

$$\dot\alpha_{\varepsilon\nu} = \alpha_{\varepsilon\nu}, \quad \dot\beta_{\varepsilon\nu} = \beta_{\varepsilon\nu}, \quad \dot\gamma_{\varepsilon\nu} = \gamma_{\varepsilon\nu}, \quad \dot\delta_{\varepsilon\nu} = \delta_{\varepsilon\nu}, \qquad \begin{pmatrix}\varepsilon = 1, 2, \ldots, q \\ \nu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

$$\dot\alpha_{\eta\nu} = \beta_{\eta\nu}, \quad \dot\beta_{\eta\nu} = -\alpha_{\eta\nu}, \quad \dot\gamma_{\eta\nu} = \delta_{\eta\nu}, \quad \dot\delta_{\eta\nu} = -\gamma_{\eta\nu} \qquad \begin{pmatrix}\eta = q+1, q+2, \ldots, p \\ \nu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

ist, $\Delta_{\dot\beta}$ die Determinante $\Sigma \pm \dot\beta_{11}\dot\beta_{22}\ldots\dot\beta_{pp}$ und $\dot\beta'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\dot\beta_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet, und unter $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ eine beliebige Lösung des Gleichungensystems:

$$(\dot E) \qquad \begin{cases} e^{-\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_{\nu}\frac{\dot\alpha_{\nu\mu}\dot\beta'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\dot\beta}}\bar\varrho_\mu^{(i)}\bar\varrho_{\mu'}^{(i)}\pi i + 2\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu}\frac{\dot\beta'_{\nu\mu}}{\Delta_{\dot\beta}}\left(\sigma_\nu + \frac12\sum\limits_{\varepsilon}\alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right)\bar\varrho_\mu^{(i)}\pi i} = 1, \\[2ex] \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

zu verstehen ist, in dem $\bar\varrho_1^{(i)}, \bar\varrho_2^{(i)}, \ldots, \bar\varrho_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ die sämmtlichen Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(\dot C) \qquad \sum_{\mu'}\sum_{\nu}\dot\alpha_{\nu1}\dot\beta'_{\nu\mu'}\bar\varrho_{\mu'} \equiv 0 \pmod{\Delta_{\dot\beta}}, \;\ldots,\; \sum_{\mu'}\sum_{\nu}\dot\alpha_{\nu p}\dot\beta'_{\nu\mu'}\bar\varrho_{\mu'} \equiv 0 \pmod{\Delta_{\dot\beta}}$$

bezeichnen.

9.

Es soll jetzt endlich der vierte der im ersten Artikel aufgestellten vier Fälle behandelt werden, der dadurch charakterisirt ist, dass bei der vorgelegten linearen Transformation T die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_{\beta}^{(m,n)} = \Sigma \pm \beta_{m_1 n_1} \beta_{m_2 n_2} \ldots \beta_{m_q n_q}$ der Determinante $\varDelta_\beta$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, während alle Unterdeterminanten höheren Grades verschwinden. Wie in Art. 6 des fünften Abschnitts gezeigt ist, kann man in diesem Falle die Transformation T aus den drei dort angeschriebenen Transformationen K', $\overline{T}$, K'' in der Form:

$$T = K' \overline{T} K''$$

zusammensetzen, und man kann daher auch die zur Transformation T gehörige Thetaformel aus den drei, zu den Transformationen K', $\overline{T}$, K'' gehörigen Thetaformeln zusammensetzen; dabei wird man beachten, dass die beiden Transformationen K', K'' elementare Transformationen vom Typus T_{I_1} sind, die ihnen entsprechenden Thetaformeln also aus der Formel (I_1) des zweiten Abschnitts durch passende Verfügung über die dort vorkommenden Grössen d hervorgehen; für die Transformation $\overline{T}$ aber die Unterdeterminante $\nabla_{\bar\beta} = \Sigma \pm \bar\beta_{11} \bar\beta_{22} \ldots \bar\beta_{qq}$ q^{ten} Grades der Determinante $\varDelta_{\bar\beta}$ von Null verschieden ist, während alle Unterdeterminanten höheren Grades verschwinden, die dieser Transformation entsprechende Thetaformel also aus der Formel ($\mathfrak{T}'$) des vorigen Artikels bei passender Verfügung über die dort vorkommenden α, β, γ, δ hervorgeht. Man erhält auf diese Weise die der vorliegenden Transformation T entsprechende Thetaformel in der Gestalt:

$$(\mathfrak{T}'') \qquad n_1 n_2 (rs)^p \varDelta_{\ddot\beta}^{p-1} \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{i^{p-q}(-\pi)^p r^p}{\varDelta_{\ddot\beta}\,\varDelta_A}}\; e^{-\Phi} e^{\psi(g,h)} e^{\ddot\psi(\mathring{\sigma})} \ddot G[\mathring{\sigma}]\, H[\mathring{\tau}]$$

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs-1} e^{-\frac{1}{rs}\sum\limits_{\nu} \eta_\nu \eta'_\nu \pi i + \sum\limits_{\mu} \varkappa_\mu \lambda_\mu \pi i - \frac{1}{rs}\sum\limits_{\nu}\sum\limits_{\mu}(\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu - \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta'_\nu)\pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{rs}\sum\limits_{\nu} \hat g_\nu \eta'_\nu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_{\nu}(\hat g_\nu + \mathring{\sigma}_\nu + \eta_\nu)\mathring{\tau}_\nu \pi i}\; \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat g + \mathring{\sigma} + \eta}{r} \\[2ex] \dfrac{\hat h + \mathring{\tau} + \eta'}{s} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b,$$

bei der v, b, η, η', $\hat g$, $\hat h$, Φ, $\psi(g,h)$, $H[\mathring{\tau}]$, n_1, n_2 dieselbe Bedeutung haben wie in Art. 6, und bei der:

$$\ddot\psi(\mathring{\sigma}) = -\sum_{\nu}\sum_{\nu'}\sum_{\varepsilon} \frac{\ddot\delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu'\varepsilon}}{rs\varDelta_{\ddot\beta}} \Big(\mathring{\sigma}_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu}\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\Big)\Big(\mathring{\sigma}_{\nu'} + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu'}\alpha_{\nu'\mu'}\beta_{\nu'\mu}\Big)\pi i$$

$$-\frac{1}{rs}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\Big(\mathring{\sigma}_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu'}\alpha_{\nu\mu'}\beta_{\nu\mu'}\Big)\pi i,$$

$$\ddot{G}[\ddot{\sigma}] = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0,1,\ldots,\Delta_{\ddot{\beta}}-1} e^{-\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_{\nu}\frac{\ddot{\alpha}_{\nu\mu}\ddot{\beta}'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\ddot{\beta}}}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i + 2\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu}\frac{\ddot{\beta}'_{\nu\mu}}{\Delta_{\ddot{\beta}}}\left(\ddot{\sigma}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_{\varepsilon}\ddot{\alpha}_{\nu\varepsilon}\ddot{\beta}_{\nu\varepsilon}\right)\varrho_\mu\pi i}$$

ist, wobei:

$$\ddot{\alpha}_{\varepsilon\nu} = \alpha_{\varepsilon\nu}, \quad \ddot{\beta}_{\varepsilon\nu} = \beta_{\varepsilon\nu}, \quad \ddot{\gamma}_{\varepsilon\nu} = \gamma_{\varepsilon\nu}, \quad \ddot{\delta}_{\varepsilon\nu} = \delta_{\varepsilon\nu}, \qquad \begin{pmatrix}\varepsilon = m_1, m_2, \ldots, m_q \\ \nu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

$$\ddot{\alpha}_{\eta\nu} = \beta_{\eta\nu}, \quad \ddot{\beta}_{\eta\nu} = -\alpha_{\eta\nu}, \quad \ddot{\gamma}_{\eta\nu} = \delta_{\eta\nu}, \quad \ddot{\delta}_{\eta\nu} = -\gamma_{\eta\nu} \qquad \begin{pmatrix}\eta = m_{q+1}, m_{q+2}, \ldots, m_p \\ \nu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

ist, $\Delta_{\ddot{\beta}}$ die Determinante $\Sigma \pm \ddot{\beta}_{11}\ddot{\beta}_{22}\ldots\ddot{\beta}_{pp}$ und $\ddot{\beta}'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\ddot{\beta}_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet, und unter $\ddot{\sigma}_1, \ddot{\sigma}_2, \ldots, \ddot{\sigma}_p$ eine beliebige Lösung des Gleichungensystems:

$$(\ddot{E}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} e^{-\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_{\nu}\frac{\ddot{\alpha}_{\nu\mu}\ddot{\beta}'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\ddot{\beta}}}\bar{\varrho}^{(i)}_\mu\bar{\varrho}^{(i)}_{\mu'}\pi i + 2\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu}\frac{\ddot{\beta}'_{\nu\mu}}{\Delta_{\ddot{\beta}}}\left(\sigma_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_{\varepsilon}\ddot{\alpha}_{\nu\varepsilon}\ddot{\beta}_{\nu\varepsilon}\right)\bar{\varrho}^{(i)}_\mu\pi i} = 1, \\ \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, m, \end{array} \right.$$

zu verstehen ist, in dem $\bar{\varrho}_1^{(i)}, \bar{\varrho}_2^{(i)}, \ldots, \bar{\varrho}_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ die sämmtlichen Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(\ddot{C}) \qquad \sum_{\mu'}\sum_{\nu}\ddot{\alpha}_{\nu 1}\ddot{\beta}'_{\nu\mu'}\bar{\varrho}_{\mu'} \equiv 0 \pmod{\Delta_{\ddot{\beta}}}, \;\ldots,\; \sum_{\mu'}\sum_{\nu}\ddot{\alpha}_{\nu p}\ddot{\beta}'_{\nu\mu'}\bar{\varrho}_{\mu'} \equiv 0 \pmod{\Delta_{\ddot{\beta}}}$$

bezeichnen.

10.

Die im Vorhergehenden gewonnenen vier Transformationsformeln $(\mathfrak{T})$, $(\mathfrak{S})$, $(\mathfrak{T}')$, $(\mathfrak{T}'')$ kann man zu folgendem Endresultate zusammenfassen.

Der linearen Transformation:

$$T = \begin{vmatrix} \dfrac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & \dfrac{\beta_{\mu\nu}}{r} \\ \\ \dfrac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \dfrac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{vmatrix},$$

bei der die $4p^2$ Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den $p(2p-1)$ Relationen:

$$(T_1) \qquad \begin{array}{l} \sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu'} - \alpha_{\varepsilon\mu'}\gamma_{\varepsilon\mu}) = 0, \qquad \sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\beta_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'} - \beta_{\varepsilon\mu'}\delta_{\varepsilon\mu}) = 0, \\ \sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'} - \gamma_{\varepsilon\mu}\beta_{\varepsilon\mu'}) = \begin{array}{l} rs, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{array} \end{array} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

oder den damit äquivalenten:

$$(T_2) \qquad \begin{array}{l} \sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\mu\varepsilon}\beta_{\mu'\varepsilon} - \alpha_{\mu'\varepsilon}\beta_{\mu\varepsilon}) = 0, \qquad \sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\gamma_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon} - \gamma_{\mu'\varepsilon}\delta_{\mu\varepsilon}) = 0, \\ \sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon} - \beta_{\mu\varepsilon}\gamma_{\mu'\varepsilon}) = \begin{array}{l} rs, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu. \end{array} \end{array} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

genügen, entspricht die Thetaformel:

$$(L)\qquad n_1\, n_2\, (rs)^p \Delta_{\tilde\beta}^{p-1}\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{i^{p-\varrho}(-\pi)^p r^p}{\Delta_{\tilde\beta}\Delta_A}}\; e^{-\Phi}\, e^{\psi(g,h)}\, e^{\tilde\varphi(\mathring\sigma)}\, \dot G[\mathring\sigma]\, H[\tau]$$

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs-1} e^{-\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu\eta'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu\lambda_\mu \pi i - \frac{1}{rs}\sum\limits_\nu\sum\limits_\mu (\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu - \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta'_\nu)\pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \hat g_\nu \eta'_\nu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu (\dot g_\nu + \mathring\sigma_\nu + \eta_\nu)\mathring\tau_\nu \pi i}\; \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\dot g + \hat\sigma + \eta}{r} \\[2ex] \dfrac{\dot h + \dot\tau + \eta'}{s} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b.$$

In dieser Formel ist zunächst:

$$v_\nu = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_\mu A'_{\mu\nu} u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_\mu A'_{\mu\nu} B_{\mu\nu'}, \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

wenn man mit $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ die Ausdrücke:

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{r}\Big(\alpha_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \beta_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}\Big), \qquad B_{\mu\nu} = \frac{1}{s}\Big(\gamma_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \delta_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}\Big), \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

mit Δ_A die Determinante $\Sigma \pm A_{11} A_{22} \ldots A_{pp}$ und mit $A'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $A_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet; es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\eta_\nu = \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu - \beta_{\nu\mu}\lambda_\mu), \qquad \eta'_\nu = \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu + \delta_{\nu\mu}\lambda_\mu),$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\hat g_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu} + \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu} g_\mu - \beta_{\nu\mu} h_\mu), \qquad \hat h_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu} + \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu} g_\mu + \delta_{\nu\mu} h_\mu),$$

$$\Phi = \frac{1}{r\Delta_A}\sum_\mu\sum_{\mu'}\sum_\nu \beta_{\nu\mu} A'_{\mu'\nu} u_\mu u_{\mu'},$$

$$\psi(g,h) = \frac{1}{rs}\sum_\mu\sum_{\mu'}\sum_\nu (\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu'} g_\mu g_{\mu'} - 2\gamma_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu'} g_\mu h_{\mu'} + \beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu'} h_\mu h_{\mu'})\pi i$$

$$- \frac{1}{rs}\sum_\nu\sum_\mu\sum_{\mu'} \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}(\alpha_{\nu\mu'} g_{\mu'} - \beta_{\nu\mu'} h_{\mu'})\pi i;$$

es ist ferner:

$$H[\mathring\tau] = \sum_{\substack{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs-1}{}' e^{\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu\eta'_\nu\pi i + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu\lambda_\mu\pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu\left[\left(\mathring\tau_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\eta_\nu - \left(\hat\sigma_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\eta'_\nu\right]\pi i},$$

wobei der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass an Stelle des Systems der $2p$ Grössen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ von den $(rs)^{2p}$ Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, rs-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung nur diejenigen treten sollen, für welche die p Zahlen

$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ sämmtlich durch r theilbar sind, und unter $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ irgend eine Lösung des Gleichungensystems (E):

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{\frac{1}{rs}\sum\limits_{\nu} \bar{\eta}_\nu^{(i)} \bar{\eta}_\nu^{\prime(i)} \pi i + \sum\limits_{\mu} \bar{\varkappa}_\mu^{(i)} \lambda_\mu^{(i)} \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_{\nu}\left[\left(\tau_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_{\mu}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}_\nu^{(i)} - \left(\sigma_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_{\mu}\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}_\nu^{\prime(i)}\right]\pi i} = 1, \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \end{array} \right.$$

zu verstehen ist, in dem zur Abkürzung:

$$\sum_\mu \left(\alpha_{\nu\mu}\bar{\varkappa}_\mu^{(i)} - \beta_{\nu\mu}\bar{\lambda}_\mu^{(i)}\right) = \bar{\eta}_\nu^{(i)}, \qquad \sum_\mu \left(-\gamma_{\nu\mu}\bar{\varkappa}_\mu^{(i)} + \delta_{\nu\mu}\bar{\lambda}_\mu^{(i)}\right) = \bar{\eta}_\nu^{\prime(i)} \qquad \binom{i = 1, 2, \ldots, m}{\nu = 1, 2, \ldots, p}$$

gesetzt ist, und in dem $\bar{\varkappa}_1^{(i)}, \ldots, \bar{\varkappa}_p^{(i)}, \bar{\lambda}_1^{(i)}, \ldots, \bar{\lambda}_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ diejenigen Normallösungen $\bar{\varkappa}_1, \ldots, \bar{\varkappa}_p, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_p$ des Congruenzensystems:

$$(C) \qquad s\bar{\eta}_1 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad s\bar{\eta}_2 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \ldots, \quad s\bar{\eta}_p \equiv 0 \pmod{rs}$$

sind, welche der weiteren Bedingung genügen, dass durch sie:

$$(C') \qquad \sum_\nu \bar{\eta}_\nu \eta'_\nu \equiv 0 \pmod{rs}$$

wird für jedes System von $2p$ ganzen Zahlen $\varkappa, \lambda$, für welches die p Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ sämmtlich durch r theilbar sind; es bezeichnen weiter:

n_1 die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$s\eta_1 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad s\eta_2 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \ldots, \quad s\eta_p \equiv 0 \pmod{rs},$$
$$r\eta'_1 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad r\eta'_2 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \ldots, \quad r\eta'_p \equiv 0 \pmod{rs},$$

n_2 die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$\eta_1 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \eta_2 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \ldots, \quad \eta_p \equiv 0 \pmod{rs};$$

es ist weiter:

$$\tilde{\varphi}(\breve{\sigma}) = \sum_\nu \sum_{\nu'} \sum_\varepsilon \frac{\tilde{\delta}_{\nu\varepsilon}\tilde{\beta}'_{\nu'\varepsilon}}{rs\Delta_{\tilde{\beta}}}\left(\breve{\sigma}_\nu + \frac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\left(\breve{\sigma}_{\nu'} + \frac{1}{2}\sum_{\mu'}\alpha_{\nu'\mu'}\beta_{\nu'\mu'}\right)\pi i$$
$$- \frac{1}{rs}\sum_\nu \sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\left(\sigma_\nu + \frac{1}{2}\sum_{\mu'}\alpha_{\nu\mu'}\beta_{\nu\mu'}\right)\pi i,$$

$$\tilde{G}[\mathring{\sigma}] = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0, 1, \ldots, \Delta_{\tilde{\beta}}-1} e^{-\sum\limits_\mu \sum\limits_{\mu'} \sum\limits_\nu \frac{\tilde{\alpha}_{\nu\mu}\tilde{\beta}'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\tilde{\beta}}}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i + 2\sum\limits_\mu \sum\limits_\nu \frac{\tilde{\beta}'_{\nu\mu}}{\Delta_{\tilde{\beta}}}\left(\mathring{\sigma}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\varepsilon \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right)\varrho_\mu \pi i},$$

wobei $\Delta_{\tilde{\beta}}$ die Determinante $\Sigma \pm \tilde{\beta}_{11}\tilde{\beta}_{22} \ldots \tilde{\beta}_{pp}$ und $\tilde{\beta}'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\tilde{\beta}_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet, und unter $\mathring{\sigma}_1, \breve{\sigma}_2, \ldots, \sigma_p$ eine beliebige Lösung des Gleichungensystems:

$$(\tilde{E})\qquad \left\{\begin{array}{l} e^{-\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_{\nu}\frac{\tilde{\alpha}_{\nu\mu}\tilde{\beta}'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\tilde{\beta}}}\bar{\varrho}_{\mu}^{(i)}\bar{\varrho}_{\mu'}^{(i)}\pi i+2\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu}\frac{\tilde{\beta}'_{\nu\mu}}{\Delta_{\tilde{\beta}}}\left(\sigma_{\nu}+\frac{1}{2}\sum\limits_{\varepsilon}\alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right)\bar{\varrho}_{\mu}^{(i)}\pi i} = 1, \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \end{array}\right.$$

zu verstehen ist, in dem $\bar{\varrho}_1^{(i)}, \bar{\varrho}_2^{(i)}, \ldots, \bar{\varrho}_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ die sämmtlichen Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(\tilde{C})\qquad \sum_{\mu'}\sum_{\nu}\tilde{\alpha}_{\nu 1}\tilde{\beta}'_{\nu\mu'}\bar{\varrho}_{\mu'} \equiv 0 \pmod{\Delta_{\tilde{\beta}}}, \ \ldots, \ \sum_{\mu'}\sum_{\nu}\tilde{\alpha}_{\nu p}\tilde{\beta}'_{\nu\mu'}\bar{\varrho}_{\mu'} \equiv 0 \pmod{\Delta_{\tilde{\beta}}}$$

bezeichnen; es ist endlich bezüglich der Bedeutung des unter dem Wurzelzeichen vorkommenden Buchstabens ϱ und der Bedeutung der Buchstaben $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}$ das Folgende zu bemerken:

Fall I: Sind in der vorgelegten linearen Transformation T die Zahlen β sämmtlich der Null gleich, so ist $\varrho = 0$ und:

$$\tilde{\alpha}_{\mu\nu} = 0, \quad \tilde{\beta}_{\mu\nu} = -\alpha_{\mu\nu}, \quad \tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad \tilde{\delta}_{\mu\nu} = -\gamma_{\mu\nu} \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1, 2, \ldots, p\\ \nu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

zu setzen;

Fall II: Sind in der vorgelegten linearen Transformation T die Zahlen β nicht sämmtlich der Null gleich, und besitzt ihre Determinante $\Delta_{\beta} = \Sigma \pm \beta_{11}\beta_{22}\ldots\beta_{pp}$ einen von Null verschiedenen Werth, so ist $\varrho = p$ und:

$$\tilde{\alpha}_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu}, \quad \tilde{\beta}_{\mu\nu} = \beta_{\mu\nu}, \quad \tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}, \quad \tilde{\delta}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1, 2, \ldots, p\\ \nu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

zu setzen;

Fall III: Sind in der vorgelegten linearen Transformation T die Zahlen β nicht sämmtlich der Null gleich, und besitzt die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_{\beta} = \Sigma \pm \beta_{11}\beta_{22}\ldots\beta_{qq}$ der Determinante Δ_{β} einen von Null verschiedenen Werth, während alle Unterdeterminanten $q+1^{\text{ten}}$ Grades von Δ_{β} verschwinden, so ist $\varrho = q$ und:

$$\tilde{\alpha}_{\varepsilon\nu} = \alpha_{\varepsilon\nu}, \quad \tilde{\beta}_{\varepsilon\nu} = \beta_{\varepsilon\nu}, \quad \tilde{\gamma}_{\varepsilon\nu} = \gamma_{\varepsilon\nu}, \quad \tilde{\delta}_{\varepsilon\nu} = \delta_{\varepsilon\nu}, \qquad \begin{pmatrix}\varepsilon = 1, 2, \ldots, q\\ \nu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

$$\tilde{\alpha}_{\eta\nu} = \beta_{\eta\nu}, \quad \tilde{\beta}_{\eta\nu} = -\alpha_{\eta\nu}, \quad \tilde{\gamma}_{\eta\nu} = \delta_{\eta\nu}, \quad \tilde{\delta}_{\eta\nu} = -\gamma_{\eta\nu} \qquad \begin{pmatrix}\eta = q+1, q+2, \ldots, p\\ \nu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

zu setzen;

Fall IV: Sind in der vorgelegten linearen Transformation T die Zahlen β nicht sämmtlich der Null gleich, und besitzt die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_{\beta}^{(m,n)} = \Sigma \pm \beta_{m_1 n_1}\beta_{m_2 n_2}\ldots\beta_{m_q n_q}$ der Determinante Δ_{β} einen von Null verschiedenen Werth, während alle Unterdeterminanten $q+1^{\text{ten}}$ Grades von Δ_{β} verschwinden, so ist $\varrho = q$ und:

$$\tilde{\alpha}_{\varepsilon\nu} = \alpha_{\varepsilon\nu}, \quad \tilde{\beta}_{\varepsilon\nu} = \beta_{\varepsilon\nu}, \quad \tilde{\gamma}_{\varepsilon\nu} = \gamma_{\varepsilon\nu}, \quad \tilde{\delta}_{\varepsilon\nu} = \delta_{\varepsilon\nu}, \qquad \begin{pmatrix}\varepsilon = m_1, m_2, \ldots, m_q\\ \nu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

$$\tilde{\alpha}_{\eta\nu} = \beta_{\eta\nu}, \quad \tilde{\beta}_{\eta\nu} = -\alpha_{\eta\nu}, \quad \tilde{\gamma}_{\eta\nu} = \delta_{\eta\nu}, \quad \tilde{\delta}_{\eta\nu} = -\gamma_{\eta\nu} \qquad \begin{pmatrix}\eta = m_{q+1}, m_{q+2}, \ldots, m_p\\ \nu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

zu setzen.

11.

Besondere Erwähnung verdient der Fall, wo die beiden Zahlen r und s den Werth 1 besitzen. Setzt man in der soeben aufgestellten Formel (L) $r=s=1$, so findet man, dass der ganzzahligen linearen Transformation:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \alpha_{\mu\nu} & \beta_{\mu\nu} \\ \hline \gamma_{\mu\nu} & \delta_{\mu\nu} \end{array}\right|,$$

bei der die $4p^2$ Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die $p(2p-1)$ Relationen:

$$(T_1)\qquad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu'}-\alpha_{\varepsilon\mu'}\gamma_{\varepsilon\mu})=0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\beta_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'}-\beta_{\varepsilon\mu'}\delta_{\varepsilon\mu})=0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'}-\gamma_{\varepsilon\mu}\beta_{\varepsilon\mu'}) = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu'=\mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{matrix} \end{gathered} \qquad {\scriptstyle (\mu,\mu'=1,2,\ldots,p)}$$

oder die damit äquivalenten:

$$(T_2)\qquad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\mu\varepsilon}\beta_{\mu'\varepsilon}-\alpha_{\mu'\varepsilon}\beta_{\mu\varepsilon})=0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\gamma_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon}-\gamma_{\mu'\varepsilon}\delta_{\mu\varepsilon})=0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon}-\beta_{\mu\varepsilon}\gamma_{\mu'\varepsilon}) = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu'=\mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{matrix} \end{gathered} \qquad {\scriptstyle (\mu,\mu'=1,2,\ldots,p)}$$

erfüllen, die Thetaformel:

$$(L_1)\qquad \Delta_{\tilde\beta}^{p-1}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{i^{p-\varrho}(-\pi)^p}{\Delta_{\tilde\beta}\Delta_A}}\; e^{-\Phi}\, e^{\psi(g,h)}\, e^{\tilde\varphi(0)}\,\tilde G[0]\;\vartheta\begin{bmatrix} \hat g \\ \hat h \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b$$

entspricht.

In dieser Formel ist zunächst:

$$v_\nu = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_\mu A'_{\mu\nu}u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_\mu A'_{\mu\nu}B_{\mu\nu'}, \qquad {\scriptstyle (\nu,\nu'=1,2,\ldots,p)}$$

wenn man mit $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ die Ausdrücke:

$$A_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \beta_{\nu\varkappa}a_{\mu\varkappa}, \qquad B_{\mu\nu} = \gamma_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \delta_{\nu\varkappa}a_{\mu\varkappa}, \qquad {\scriptstyle (\mu,\nu=1,2,\ldots,p)}$$

mit Δ_A die Determinante $\Sigma \pm A_{11}A_{22}\ldots A_{pp}$ und mit $A'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $A_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet; es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\hat g_\nu = \tfrac12\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu} + \sum_\mu(\alpha_{\nu\mu}g_\mu - \beta_{\nu\mu}h_\mu), \qquad \hat h_\nu = \tfrac12\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu} + \sum_\mu(-\gamma_{\nu\mu}g_\mu + \delta_{\nu\mu}h_\mu), \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\ldots,p)}$$

$$\Phi = \frac{1}{\Delta_A}\sum_\mu\sum_{\mu'}\sum_\nu \beta_{\nu\mu}A'_{\mu'\nu}u_\mu u_{\mu'},$$

$$\psi(g,h) = \sum_\mu\sum_{\mu'}\sum_\nu(\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu'}g_\mu g_{\mu'} - 2\gamma_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu'}g_\mu h_{\mu'} + \beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu'}h_\mu h_{\mu'})\pi i - \sum_\nu\sum_\mu\sum_{\mu'}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}(\alpha_{\nu\mu'}g_{\mu'} - \beta_{\nu\mu'}h_{\mu'})\pi i,$$

$$\varphi(0) = -\frac{1}{4}\sum_{\nu}\sum_{\nu'}\sum_{\varepsilon}\frac{\tilde{\delta}_{\nu\varepsilon}\tilde{\beta}'_{\nu'\varepsilon}}{\Delta_{\tilde{\beta}}}\sum_{\mu}\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\sum_{\mu'}\alpha_{\nu'\mu'}\beta_{\nu'\mu'}\pi i - \frac{1}{2}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\sum_{\mu'}\alpha_{\nu\mu'}\beta_{\nu\mu'}\pi i,$$

$$\tilde{G}[0] = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\Delta_{\tilde{\beta}}-1} e^{-\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_{\nu}\frac{\tilde{\alpha}_{\nu\mu}\tilde{\beta}'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\tilde{\beta}}}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i + \sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu}\frac{\tilde{\beta}'_{\nu\mu}}{\Delta_{\tilde{\beta}}}\sum\limits_{\varepsilon}\alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\varrho_\mu\pi i},$$

wobei $\Delta_{\tilde{\beta}}$ die Determinante $\Sigma \pm \tilde{\beta}_{11}\tilde{\beta}_{22}\ldots\tilde{\beta}_{pp}$ und $\tilde{\beta}'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\tilde{\beta}_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet; es gilt endlich bezüglich des unter dem Wurzelzeichen vorkommenden Buchstabens ϱ und der Buchstaben $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\delta}$ das am Ende des vorigen Artikels Bemerkte.

Siebenter Abschnitt.

Von den nicht linearen Transformationen.

1.

Bis jetzt sind ausschliesslich lineare Transformationen, d. h. solche, für welche die Ordnungszahl t den Werth 1 hat, betrachtet worden. Ist die rationale Zahl t von 1 verschieden, so drücke man sie durch einen Bruch mit kleinstem Zähler und Nenner aus, setze also $t = \frac{n}{n'}$, wo n, n' positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind. Nennt man dann die Transformation T eine zur Zahl $\frac{n}{n'}$ gehörige, so kann man unter Anwendung des bisher stets gebrauchten Princips der Zusammensetzung einer Transformation aus mehreren jede zur Zahl $\frac{n}{n'}$ gehörige Transformation:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a}_{\mu\nu} & \mathfrak{b}_{\mu\nu} \\ \hline \mathfrak{c}_{\mu\nu} & \mathfrak{d}_{\mu\nu} \end{array}\right|$$

aus einer speciellen zur Zahl $\frac{1}{n'}$ gehörigen, einer linearen und einer speciellen zur Zahl n gehörigen Transformation in der Form:

$$T = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{n'} & \cdots & 0 & & & \\ \cdot & & \cdot & & 0 & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{n'} & & & \\ \hline & & & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & & \cdot & & \cdot \\ & & & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} \frac{n'\mathfrak{a}_{\mu\nu}}{n} & \frac{\mathfrak{b}_{\mu\nu}}{n} \\ \hline n'\mathfrak{c}_{\mu\nu} & \mathfrak{d}_{\mu\nu} \end{array}\right| \left|\begin{array}{ccc|ccc} n & \cdots & 0 & & & \\ \cdot & & \cdot & & 0 & \\ 0 & \cdots & n & & & \\ \hline & & & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & & \cdot & & \cdot \\ & & & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right|$$

zusammensetzen, und man kann daher auch die der Transformation T entsprechende Thetaformel durch Zusammensetzung der drei, den angeschriebenen Transformationen entsprechenden Thetaformeln erhalten. Die der mittleren, linearen Transformation entsprechende Thetaformel ergibt sich aus der im vorigen Artikel aufgestellten Formel (L) durch passende Verfügung über die darin vorkommenden Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, r, s$; die der ersten und dritten Transformation entsprechenden Thetaformeln sollen jetzt aufgestellt werden.

2.

Führt man auf der rechten Seite der Gleichung:

$$(F) \qquad \vartheta^n(\!(u)\!)_a = \sum_{\substack{m_1^{(1)},\ldots,m_p^{(1)} \\ \cdots \\ m_1^{(n)},\ldots,m_p^{(n)}}}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(m_\mu^{(1)} m_{\mu'}^{(1)} + \cdots + m_\mu^{(n)} m_{\mu'}^{(n)}\right) + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(m_\mu^{(1)} + \cdots + m_\mu^{(n)}\right) u_\mu}$$

an Stelle der Summationsbuchstaben $m_1^{(n)}, \ldots, m_p^{(n)}$ neue Summationsbuchstaben $\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_p$ ein mit Hülfe der Gleichuug:

$$m_\mu^{(n)} = \overline{m}_\mu - m_\mu^{(1)} - m_\mu^{(2)} - \cdots - m_\mu^{(n-1)} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

und setzt weiter noch:

$$\overline{m}_\mu = n r_\mu + \varkappa_\mu, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

indem man mit $\varkappa_\mu$ den kleinsten positiven Rest von $\overline{m}_\mu$ nach dem Modul n bezeichnet, so geht aus der Gleichung (F) die neue:

$$(F_1) \qquad \vartheta^n(\!(u)\!)_a = \sum_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p}^{0,1,\ldots,n-1} \; \sum_{r_1,\ldots,r_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} A^{(a,n)}_{\substack{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p \\ r_1 \ldots r_p}} \, e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(r_\mu + \frac{\varkappa_\mu}{n}\right) n u_\mu}$$

hervor, bei der zur Abkürzung:

$$A^{(a,n)}_{\substack{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p \\ r_1 \ldots r_p}}$$

$$= \sum_{\substack{m_1^{(1)},\ldots,m_p^{(1)} \\ \cdots \\ m_1^{(n-1)},\ldots,m_p^{(n-1)}}}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left[m_\mu^{(1)} m_{\mu'}^{(1)} + \cdots + m_\mu^{(n-1)} m_{\mu'}^{(n-1)} + \left(m_\mu^{(1)} + \cdots + m_\mu^{(n-1)} - n r_\mu - \varkappa_\mu\right)\left(m_{\mu'}^{(1)} + \cdots + m_{\mu'}^{(n-1)} - n r_{\mu'} - \varkappa_{\mu'}\right)\right]}$$

gesetzt ist. Drückt man ferner die Constanten A mit Hülfe der Gleichung:

$$A^{(a,n)}_{\substack{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p \\ r_1 \ldots r_p}} = A^{(a,n)}_{\substack{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p \\ 0 \ldots 0}} \, e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} n a_{\mu\mu'}\left(r_\mu + \frac{\varkappa_\mu}{n}\right)\left(r_{\mu'} + \frac{\varkappa_{\mu'}}{n}\right) - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\frac{\varkappa_\mu \varkappa_{\mu'}}{n}}$$

durch die n^p speciellen $A^{(a,n)}_{\substack{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p \\ 0 \ldots 0}}$ unter ihnen aus und setzt allgemein:

$$A^{(a,n)}_{\substack{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p \\ 0 \ldots 0}} \, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\frac{\varkappa_\mu \varkappa_{\mu'}}{n}} = K^{(a,n)}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p},$$

so geht die Gleichung (F_1) in die Gleichung:

$$(F_2)\qquad \vartheta^n((u))_a = \sum_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p}^{0,1,\ldots,n-1} K^{(a,n)}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p} \sum_{r_1,\ldots,r_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} n a_{\mu\mu'}\left(r_\mu+\frac{\varkappa_\mu}{n}\right)\left(r_{\mu'}+\frac{\varkappa_{\mu'}}{n}\right)+2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(r_\mu+\frac{\varkappa_\mu}{n}\right) n u_\mu},$$

bei der:

$$K^{(a,n)}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}$$

$$= \sum_{\substack{m_1^{(1)},\ldots,m_p^{(1)}\\ \cdots\\ m_1^{(n-1)},\ldots,m_p^{(n-1)}}}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left[m_\mu^{(1)}m_{\mu'}^{(1)}+\cdots+m_\mu^{(n-1)}m_{\mu'}^{(n-1)}+\left(m_\mu^{(1)}+\cdots+m_\mu^{(n-1)}-\varkappa_\mu\right)\left(m_{\mu'}^{(1)}+\cdots+m_{\mu'}^{(n-1)}-\varkappa_{\mu'}\right)-\frac{\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'}}{n}\right]}$$

ist, über, und aus dieser geht, wenn man die auf ihrer rechten Seite vorkommende p-fach unendliche Reihe durch die damit identische Thetafunction ersetzt, die Formel:

$$(\Theta_0)\qquad \vartheta^n((u))_a = \sum_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p}^{0,1,\ldots,n-1} K^{(a,n)}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varkappa}{n}\\ 0\end{bmatrix}((nu))_{na}$$

hervor.

Aus der Formel (Θ_0) folgt durch passende Änderung der Variablen u die allgemeinere:

$$(\Theta)\qquad \vartheta^n\begin{bmatrix}g\\ h\end{bmatrix}((u))_a = \sum_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p}^{0,1,\ldots,n-1} K^{(a,n)}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}\,\vartheta\begin{bmatrix}g+\frac{\varkappa}{n}\\ nh\end{bmatrix}((nu))_{na},$$

in der $g_1, \ldots, g_p$, $h_1, \ldots, h_p$ beliebige reelle Constanten bezeichnen.

Die Formeln (Θ_0), (Θ) sind von den Formeln (H_0), (H_0') im vierten Abschnitte des ersten Theiles nicht verschieden, und man kann ohne Mühe von der jetzt erhaltenen neuen Ausdrucksform der Constanten K zu der früheren auf Seite 31 angeschriebenen direkt gelangen. Es ist dazu nur nöthig, an Stelle der jetzigen Summationsbuchstaben m neue Summationsbuchstaben n mit Hülfe der Gleichungen:

$$\begin{aligned}
m_\mu^{(1)} &= \quad n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + \cdots + n_\mu^{(n-2)} + n_\mu^{(n-1)},\\
m_\mu^{(2)} &= -n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + \cdots + n_\mu^{(n-2)} + n_\mu^{(n-1)},\\
m_\mu^{(3)} &= \qquad\quad -2n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + \cdots + n_\mu^{(n-2)} + n_\mu^{(n-1)}, \qquad (\mu=1,2,\ldots,p)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
m_\mu^{(n-1)} &= \qquad\qquad\qquad\qquad -(n-2)n_\mu^{(n-2)} + n_\mu^{(n-1)}
\end{aligned}$$

einzuführen und zu beachten, dass dadurch:

$$m_\mu^{(1)}m_{\mu'}^{(1)}+\cdots+m_\mu^{(n-1)}m_{\mu'}^{(n-1)}+\left(m_\mu^{(1)}+\cdots+m_\mu^{(n-1)}-\varkappa_\mu\right)\left(m_{\mu'}^{(1)}+\cdots+m_{\mu'}^{(n-1)}-\varkappa_{\mu'}\right)-\frac{\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'}}{n}$$

$$=1.2\,n_\mu^{(1)}n_{\mu'}^{(1)}+2.3\,n_\mu^{(2)}n_{\mu'}^{(2)}+\cdots+(n-2)(n-1)\,n_\mu^{(n-2)}n_{\mu'}^{(n-2)}+(n-1)n\left(n_\mu^{(n-1)}-\frac{\varkappa_\mu}{n}\right)\left(n_{\mu'}^{(n-1)}-\frac{\varkappa_{\mu'}}{n}\right)$$

wird, und dass man die Summation nach den n so ausführen kann, dass man:

$$n_\mu^{(1)} = \hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{1}{1.2}\,\varepsilon_\mu^{(1)},$$

$$n_\mu^{(2)} = \hat{n}_\mu^{(2)} + \frac{1}{2.3}\,(\varepsilon_\mu^{(1)} + 2\varepsilon_\mu^{(2)}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$n_\mu^{(n-2)} = \hat{n}_\mu^{(n-2)} + \frac{1}{(n-2)(n-1)}\,(\varepsilon_\mu^{(1)} + 2\varepsilon_\mu^{(2)} + \cdots + \overline{n-2}\,\varepsilon_\mu^{(n-2)}),$$

$$n_\mu^{(n-1)} = \hat{n}_\mu^{(n-1)} + \frac{1}{(n-1)}\,(\varepsilon_\mu^{(1)} + 2\varepsilon_\mu^{(2)} + \cdots + \overline{n-2}\,\varepsilon_\mu^{(n-2)})$$

setzt und sodann nach allen Grössen $\hat{n}$ von $-\infty$ bis $+\infty$, nach $\varepsilon_\mu^{(\nu)}$ aber für ${\scriptstyle \nu = 1, 2, \ldots, n-2 \atop \mu = 1, 2, \ldots, p}$ von 0 bis ν summirt.

3.

Es soll jetzt nachgewiesen werden, dass die durch die Formel (Θ) repräsentirte Umformung der Function $\vartheta^n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a$ eine Transformation im Sinne der im ersten Abschnitte entwickelten Transformationstheorie ist. Zu dem Ende definire man $4p^2$ rationale Zahlen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}, \mathfrak{b}_{\mu\nu}, \mathfrak{c}_{\mu\nu}, \mathfrak{d}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{a}_{\mu\nu} = \begin{matrix} \frac{1}{n}, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \end{matrix} \qquad \mathfrak{b}_{\mu\nu} = 0,$$

$$\mathfrak{c}_{\mu\nu} = 0, \qquad \mathfrak{d}_{\mu\nu} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \end{matrix} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

indem man beachtet, dass diese Zahlen eine zur Zahl $t = \frac{1}{n}$ gehörige Transformation bestimmen, und führe dieselben in die Gleichungen (1) bis (6) auf Seite 65 ein. Die Gleichungen (5), (6) gehen dann in die Gleichungen:

$$v_\nu = n u_\nu, \qquad b_{\nu\nu'} = n a_{\nu\nu'} \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

über, und man erkennt daraus, dass die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T_n = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{n} & \cdots & 0 & & & \\ & \cdots & & & 0 & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{n} & & & \\ \hline & & & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & & & \cdots & \\ & & & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsproblems durch die Formel:

$$(N) \qquad \vartheta^n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}^{0,1,\ldots,n-1} K_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}^{(a,n)}\, \vartheta\begin{bmatrix} g + \frac{\varkappa}{n} \\ nh \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b$$

geliefert wird, bei der:

$$v_\nu = n u_\nu, \qquad b_{\nu\nu'} = n a_{\nu\nu'} \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

ist, während die g, h beliebige reelle Constanten bezeichnen.

Entsprechend wird die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T_n^{-1} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} n & \ldots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \ldots & n & & & \\ \hline & & & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right|$$

bestimmten, zu dem obigen inversen Transformationsproblems durch die aus der Formel (N) durch Umkehrung entstehende Formel:

$$(\bar{N}) \qquad n^p K^{(a,n)}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} \vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}((v))_b = \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_p}^{0,1,\ldots,n-1} \vartheta^n \begin{bmatrix} k - \frac{\varkappa}{n} \\ \frac{l+\lambda}{n} \end{bmatrix} ((u))_a \, e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} k_\mu \lambda_\mu}$$

gegeben, bei der:

$$u_\mu = \frac{v_\mu}{n}, \qquad a_{\mu\mu'} = \frac{b_{\mu\mu'}}{n} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

ist, während die k, l beliebige reelle Constanten bezeichnen.

4.

Man gehe jetzt auf die vorgelegte, zur Zahl $\frac{n}{n'}$ gehörige Transformation T zurück und stelle in derselben sowohl die $2p^2$ rationalen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, als auch die $2p^2$ rationalen Zahlen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ als Brüche mit gemeinsamem Nenner dar, indem man für $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\mathfrak{a}_{\mu\nu} = \frac{\alpha_{\mu\nu}}{r}, \qquad \mathfrak{b}_{\mu\nu} = \frac{\beta_{\mu\nu}}{r}, \qquad \mathfrak{c}_{\mu\nu} = \frac{\gamma_{\mu\nu}}{s}, \qquad \mathfrak{d}_{\mu\nu} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{s}$$

setzt, wobei die α, β, γ, δ ganze, r und s positive ganze Zahlen bezeichnen. Die Transformation T nimmt dann die Gestalt:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & \frac{\beta_{\mu\nu}}{r} \\ \hline \frac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \frac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{array}\right|,$$

an, wobei zwischen den ganzen Zahlen α, β, γ, δ die $p(2p-1)$ Relationen:

$$(T_1) \qquad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu'} - \alpha_{\varepsilon\mu'}\gamma_{\varepsilon\mu}) = 0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\beta_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'} - \beta_{\varepsilon\mu'}\delta_{\varepsilon\mu}) = 0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'} - \gamma_{\varepsilon\mu}\beta_{\varepsilon\mu'}) = \begin{cases} \frac{n}{n'} rs, & \text{wenn } \mu' = \mu, \\ 0, & \text{wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{cases} \end{gathered} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

oder die damit äquivalenten:

$$(T_2)\quad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\mu\varepsilon}\beta_{\mu'\varepsilon}-\alpha_{\mu'\varepsilon}\beta_{\mu\varepsilon})=0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\gamma_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon}-\gamma_{\mu'\varepsilon}\delta_{\mu\varepsilon})=0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon}-\beta_{\mu\varepsilon}\gamma_{\mu'\varepsilon})=\begin{cases}\frac{n}{n'}rs, & \text{wenn } \mu'=\mu,\\ 0, & \text{wenn } \mu'\gtrless\mu,\end{cases}\end{gathered} \qquad (\mu,\mu'=1,2,\dots,p)$$

bestehen, und es wird weiter die in Art. 1 angeschriebene Zerlegung der Transformation T nunmehr durch die Gleichung:

$$T=\left|\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{n'} & \cdots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{n'} & & & \\ \hline & & & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} \frac{n'\alpha_{\mu\nu}}{nr} & \frac{\beta_{\mu\nu}}{nr} \\ \hline \frac{n'\gamma_{\mu\nu}}{s} & \frac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{array}\right| \left|\begin{array}{ccc|ccc} n & \cdots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \cdots & n & & & \\ \hline & & & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right|$$

repräsentirt.

Mit Rücksicht auf die Resultate des letzten Artikels erkennt man dann sofort, dass die zur ersten dieser drei Transformationen gehörige Thetaformel aus der Formel (N) hervorgeht, wenn man darin n durch n' ersetzt, die zur dritten Transformation gehörige Thetaformel aber die Formel (N) ist. Setzt man diese Formeln mit der zur mittleren, linearen Transformation gehörigen Thetaformel, welche aus der Formel (L) auf Seite 118 hervorgeht, wenn man darin die Grössen:

$$r, \qquad s, \qquad \alpha_{\mu\nu}, \qquad \beta_{\mu\nu}, \qquad \gamma_{\mu\nu}, \qquad \delta_{\mu\nu},$$

für jedes μ und ν von 1 bis p durch die Grössen:

$$nr, \qquad s, \qquad n'\alpha_{\mu\nu}, \qquad \beta_{\mu\nu}, \qquad n'\gamma_{\mu\nu}, \qquad \delta_{\mu\nu}$$

ersetzt, in der vorgeschriebenen Reihenfolge zusammen, so erhält man die zu der vorgelegten Transformation T gehörige Thetaformel in der Gestalt:

$$(A)\quad \begin{aligned} &\frac{n'_1 n'_2 n_3}{n_4}\left(\frac{nrs}{n'}\right)^p \Delta'^{\,p-1}_{\tilde\beta}\, L^{(b,n)}_{\mathring\varepsilon_1\dots\hat\varepsilon_p}\,\vartheta^{n'}\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{i^{p-q}(-\pi)^p r^p}{n'^p\Delta'_{\tilde\beta}\Delta_A}}\; e^{-n'\Phi}\, e^{\frac{n'^2}{n}\psi(g,h)}\, e^{\tilde\varphi'(\mathring\sigma)}\tilde G'[\mathring\sigma]\, H'[\mathring\tau] \\ &\times\sum_{\substack{\varkappa_1,\dots,\varkappa_p\\ \lambda_1,\dots,\lambda_p}}^{0,1,\dots,nrs-1} e^{-\frac{1}{nrs}\sum\limits_\nu \eta_\nu\eta'_\nu\pi i-\frac{1}{n'}\sum\limits_\mu\varkappa_\mu\lambda_\mu\pi i-\frac{n'}{nrs}\sum\limits_\nu\sum\limits_\mu(\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu-\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta'_\nu)\pi i-\frac{2n'}{nrs}\sum\limits_\nu\hat g_\nu\eta'_\nu\pi i} \\ &\qquad\times e^{-\frac{2}{nrs}\sum\limits_\nu(n'\hat g_\nu+\mathring\sigma_\nu+\eta_\nu)\mathring\tau_\nu\pi i}\; L'^{(a,n')}_{\substack{\varkappa_1\dots\varkappa_p\\ \lambda_1\dots\lambda_p}}\,\vartheta^n\begin{bmatrix}\dfrac{n'\hat g+\sigma-r\mathring\varepsilon+\eta}{nr}\\[2ex] \dfrac{n'\hat h+\mathring\tau+\eta'}{ns}\end{bmatrix}(\!(v)\!)_b. \end{aligned}$$

In dieser Formel ist zunächst:

$$v_\nu = \frac{\pi i}{\varDelta_A} \sum_\mu A'_{\mu\nu} u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{\pi i}{\varDelta_A} \sum_\mu A'_{\mu\nu} B_{\mu\nu'}, \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

wenn man mit $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ die Ausdrücke:

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{r}\Big(\alpha_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \beta_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}\Big), \qquad B_{\mu\nu} = \frac{1}{s}\Big(\gamma_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \delta_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}\Big), \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

mit $\varDelta_A$ die Determinante $\Sigma \pm A_{11} A_{22} \ldots A_{pp}$ und mit $A'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $A_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet; es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\eta_\nu = \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu - \beta_{\nu\mu}\lambda_\mu), \qquad \eta'_\nu = \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu + \delta_{\nu\mu}\lambda_\mu),$$

$$\hat{g}_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu} + \sum_\mu(\alpha_{\nu\mu}g_\mu - \beta_{\nu\mu}h_\mu), \qquad \hat{h}_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu} + \sum_\mu(-\gamma_{\nu\mu}g_\mu + \delta_{\nu\mu}h_\mu), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\Phi = \frac{1}{r\varDelta_A} \sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu \beta_{\nu\mu} A'_{\mu'\nu} u_\mu u_{\mu'},$$

$$\psi(g, h) = \frac{1}{rs} \sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu (\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu'}g_\mu g_{\mu'} - 2\gamma_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu'}g_\mu h_{\mu'} + \beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu'}h_\mu h_{\mu'})\pi i$$
$$- \frac{1}{rs} \sum_\nu \sum_\mu \sum_{\mu'} \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}(\alpha_{\nu\mu'}g_{\mu'} - \beta_{\nu\mu'}h_{\mu'})\pi i;$$

es sind weiter mit $\varDelta'_{\tilde{\beta}}$, $\tilde{\varphi}'(\mathring{\sigma})$, $\tilde{G}'[\mathring{\sigma}]$, $H'[\mathring{\tau}]$, n'_1, n'_2 jene Grössen bezeichnet, in welche die bei der Formel (L) auf Seite 118 definirten Grössen $\varDelta_{\tilde{\beta}}$, $\tilde{\varphi}(\mathring{\sigma})$, $\tilde{G}[\sigma]$, $H[\mathring{\tau}]$, n_1, n_2 übergehen, wenn man darin:

$$r, \qquad s, \qquad \alpha_{\mu\nu}, \qquad \beta_{\mu\nu}, \qquad \gamma_{\mu\nu}, \qquad \delta_{\mu\nu}$$

für jedes μ und ν von 1 bis p durch:

$$nr, \qquad s, \qquad n'\alpha_{\mu\nu}, \qquad \beta_{\mu\nu}, \qquad n'\gamma_{\mu\nu}, \qquad \delta_{\mu\nu}$$

ersetzt; es gilt ferner bezüglich der Bedeutung von ϱ und der $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\delta}$ das auf Seite 120 Bemerkte; es ist weiter zur Abkürzung gesetzt:

$$L^{(b,n)}_{\hat{\varepsilon}_1 \ldots \hat{\varepsilon}_p} = \sum_{\substack{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p}}^{0,1,\ldots,nrs-1}{}' e^{-\frac{n'^2}{nrs}\sum_\nu \eta_\nu \eta'_\nu \pi i - n'\sum_\mu \varkappa_\mu\lambda_\mu \pi i + \frac{2n'}{nrs}\sum_\nu\left[\left(\mathring{\tau}_\nu + \frac{n'}{2}\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\eta_\nu - \left(\mathring{\sigma}_\nu + \frac{n'}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\eta'_\nu\right]\pi i}$$
$$\times K^{(b,n)}_{\mathring{\varepsilon}_1 + \frac{n'\eta_1}{r} \cdots \hat{\varepsilon}_p + \frac{n'\eta_p}{r}},$$

wobei $\varepsilon_1, \ldots, \hat{\varepsilon}_p$ irgend welche ganze Zahlen bezeichnen, und der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass an Stelle des Systems der $2p$ Grössen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ von den $(nrs)^{2p}$ Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, nrs-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung nur diejenigen treten sollen, für welche die p Zahlen $n'\eta_1, n'\eta_2, \ldots, n'\eta_p$ sämmtlich durch r und die p Zahlen $n'\eta'_1, n'\eta'_2, \ldots, n'\eta'_p$ sämmtlich durch s theilbar sind, und:

$$L'^{(a,n)}_{\substack{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p \\ \lambda_1 \ldots \lambda_p}} = \sum_{\substack{\bar\varkappa_1, \ldots, \bar\varkappa_p \\ \bar\lambda_1, \ldots, \bar\lambda_p}}^{0,1,\ldots,nrs-1}{}' e^{\frac{1}{nrs}\sum\limits_\nu \bar\eta_\nu \bar\eta'_\nu \pi i - \frac{1}{n'}\sum\limits_\mu \bar\varkappa_\mu \bar\lambda_\mu \pi i + \frac{2}{nrs}\sum\limits_\nu \left[\left(\mathring{\gamma}_\nu + \frac{n'}{2}\sum\limits_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\bar\eta_\nu - \left(\mathring{\delta}_\nu + \frac{n'}{2}\sum\limits_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\bar\eta'_\nu\right]\pi i}$$

$$\times e^{\frac{2}{n'}\sum\limits_\mu \bar\varkappa_\mu \lambda_\mu \pi i} K^{(a,n')}_{\varkappa_1 - \bar\varkappa_1 \ldots \varkappa_p - \bar\varkappa_p},$$

wobei der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass an Stelle des Systems der $2p$ Grössen $\bar\varkappa_1, \ldots, \bar\varkappa_p, \bar\lambda_1, \ldots, \bar\lambda_p$ von den $(nrs)^{2p}$ Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, nrs-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung nur diejenigen treten sollen, für welche die p Zahlen $\bar\eta_1, \bar\eta_2, \ldots, \bar\eta_p$ sämmtlich durch nr und die p Zahlen $\bar\eta'_1, \bar\eta'_2, \ldots, \bar\eta'_p$ sämmtlich durch s theilbar sind; es bezeichnen endlich:

n_3 die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$s\eta_1 \equiv 0 \ (\text{mod. } nrs), \quad s\eta_2 \equiv 0 \ (\text{mod. } nrs), \quad \ldots, \quad s\eta_p \equiv 0 \ (\text{mod. } nrs),$$
$$r\eta'_1 \equiv 0 \ (\text{mod. } nrs), \quad r\eta'_2 \equiv 0 \ (\text{mod. } nrs), \quad \ldots, \quad r\eta'_p \equiv 0 \ (\text{mod. } nrs),$$

n_4 die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$nn's\eta_1 \equiv 0 \ (\text{mod. } nrs), \quad nn's\eta_2 \equiv 0 \ (\text{mod. } nrs), \quad \ldots, \quad nn's\eta_p \equiv 0 \ (\text{mod. } nrs),$$
$$nn'r\eta'_1 \equiv 0 \ (\text{mod. } nrs), \quad nn'r\eta'_2 \equiv 0 \ (\text{mod. } nrs), \quad \ldots, \quad nn'r\eta'_p \equiv 0 \ (\text{mod. } nrs).$$

5.

Setzt man in der Formel (A) $r = s = 1$, wodurch auch $n' = 1$ wird, so erhält man die der ganzzahligen, zur Zahl n gehörigen Transformation:

$$T = \left| \begin{array}{c|c} \alpha_{\mu\nu} & \beta_{\mu\nu} \\ \hline \gamma_{\mu\nu} & \delta_{\mu\nu} \end{array} \right|,$$

bei der zwischen den ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die $p(2p-1)$ Relationen:

$$(T_1) \quad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu'} - \alpha_{\varepsilon\mu'}\gamma_{\varepsilon\mu}) = 0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\beta_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'} - \beta_{\varepsilon\mu'}\delta_{\varepsilon\mu}) = 0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'} - \gamma_{\varepsilon\mu}\beta_{\varepsilon\mu'}) = \begin{matrix} n, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{matrix} \end{gathered} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

oder die damit äquivalenten:

$$(T_2) \quad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\mu\varepsilon}\beta_{\mu'\varepsilon} - \alpha_{\mu'\varepsilon}\beta_{\mu\varepsilon}) = 0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\gamma_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon} - \gamma_{\mu'\varepsilon}\delta_{\mu\varepsilon}) = 0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon} - \beta_{\mu\varepsilon}\gamma_{\mu'\varepsilon}) = \begin{matrix} n, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{matrix} \end{gathered} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

erfüllen, entsprechende Thetaformel in der Gestalt:

$$(A_1)\quad \begin{aligned} \varDelta_{\tilde\beta}^{p-1} L^{(b,\,n)}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p}\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a &= \sqrt{\frac{i^{p-\varrho}(-\pi)^p}{\varDelta_{\tilde\beta}\varDelta_A}}\; e^{-\Phi}\, e^{\frac{1}{n}\psi(g,h)}\, e^{\tilde\varphi(\mathring\sigma)}\, \tilde G[\mathring\sigma] \\ &\times \sum_{\substack{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu}\eta_\nu\eta'_\nu \pi i + \sum\limits_{\mu}\varkappa_\mu\lambda_\mu\pi i - \frac{1}{n}\sum\limits_{\nu}\sum\limits_{\mu}(\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu - \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta'_\nu)\pi i} \\ &\times e^{-\frac{2}{n}\sum\limits_{\nu}\hat g_\nu \eta'_\nu \pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_{\nu}(\hat g_\nu + \mathring\sigma_\nu + \eta_\nu)\mathring\tau_\nu \pi i}\; \vartheta^n\begin{bmatrix} \frac{\hat g + \mathring\sigma - \varepsilon + \eta}{n} \\ \frac{\hat h + \tau + \eta'}{n} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b . \end{aligned}$$

In dieser Formel ist zunächst:

$$v_\nu = \frac{\pi i}{\varDelta_A}\sum_\mu A'_{\mu\nu} u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{\pi i}{\varDelta_A}\sum_\mu A'_{\mu\nu} B_{\mu\nu'}, \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

wenn man mit $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ die Ausdrücke:

$$A_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \beta_{\nu\varkappa}a_{\mu\varkappa}, \qquad B_{\mu\nu} = \gamma_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \delta_{\nu\varkappa}a_{\mu\varkappa}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

mit $\varDelta_A$ die Determinante $\Sigma \pm A_{11}A_{22}\ldots A_{pp}$ und mit $A'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $A_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet; es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\eta_\nu = \sum_\mu(\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu - \beta_{\nu\mu}\lambda_\mu), \qquad \eta'_\nu = \sum_\mu(-\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu + \delta_{\nu\mu}\lambda_\mu), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\hat g_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu} + \sum_\mu(\alpha_{\nu\mu}g_\mu - \beta_{\nu\mu}h_\mu), \qquad \hat h_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu} + \sum_\mu(-\gamma_{\nu\mu}g_\mu + \delta_{\nu\mu}h_\mu),$$

$$\Phi = \frac{1}{\varDelta_A}\sum_\mu\sum_{\mu'}\sum_\nu \beta_{\nu\mu}A'_{\mu'\nu}u_\mu u_{\mu'},$$

$$\psi(g,h) = \sum_\mu\sum_{\mu'}\sum_\nu(\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu'}g_\mu g_{\mu'} - 2\gamma_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu'}g_\mu h_{\mu'} + \beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu'}h_\mu h_{\mu'})\pi i - \sum_\nu\sum_\mu\sum_{\mu'}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}(\alpha_{\nu\mu'}g_{\mu'} - \beta_{\nu\mu'}h_{\mu'})\pi i,$$

$$\begin{aligned}\tilde\varphi(\mathring\sigma) = &-\sum_\nu\sum_{\nu'}\sum_\varepsilon \frac{\tilde\delta_{\nu\varepsilon}\tilde\beta'_{\nu'\varepsilon}}{n\varDelta_{\tilde\beta}}\Big(\mathring\sigma_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\Big)\Big(\mathring\sigma_{\nu'} + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu'}\alpha_{\nu'\mu'}\beta_{\nu'\mu'}\Big)\pi i \\ &- \frac{1}{n}\sum_\nu\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\Big(\mathring\sigma_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu'}\alpha_{\nu\mu'}\beta_{\nu\mu'}\Big)\pi i,\end{aligned}$$

$$\tilde G[\mathring\sigma] = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\varDelta_{\tilde\beta}-1} e^{-\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_\nu \frac{\tilde\alpha_{\nu\mu}\tilde\beta'_{\nu\mu'}}{\varDelta_{\tilde\beta}}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i + 2\sum\limits_\mu\sum\limits_\nu \frac{\tilde\beta'_{\nu\mu}}{\varDelta_{\tilde\beta}}\left(\mathring\sigma_\nu - \frac{1}{2}\sum\limits_\varepsilon \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right)\varrho_\mu\pi i};$$

wobei $\varDelta_{\tilde\beta}$ die Determinante $\Sigma \pm \tilde\beta_{11}\tilde\beta_{22}\ldots\tilde\beta_{pp}$ und $\tilde\beta'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\tilde\beta_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet, und unter $\mathring\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ eine beliebige Lösung des Gleichungensystems:

$$(\tilde{E})\qquad \left\{\begin{array}{l} e^{-\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_{\nu}\frac{\dot{\alpha}_{\nu\mu}\tilde{\beta}'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\tilde{\beta}}}\varrho_{\mu}^{(i)}\bar{\varrho}_{\mu'}^{(i)}\pi i+2\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu}\frac{\tilde{\beta}'_{\nu\mu}}{\Delta_{\tilde{\beta}}}\left(\sigma_{\nu}+\frac{1}{2}\sum\limits_{\varepsilon}\alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right)\bar{\varrho}_{\mu}^{(i)}\pi i} = 1, \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \end{array}\right.$$

ist, in dem $\bar{\varrho}_1^{(i)}, \bar{\varrho}_2^{(i)}, \ldots, \bar{\varrho}_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ die sämmtlichen Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(\tilde{C})\qquad \sum_{\mu'}\sum_{\nu}\tilde{\alpha}_{\nu 1}\tilde{\beta}'_{\nu\mu'}\bar{\varrho}_{\mu'} \equiv 0 \;(\text{mod. } \Delta_{\tilde{\beta}}),\; \ldots,\; \sum_{\mu'}\sum_{\nu}\tilde{\alpha}_{\nu p}\tilde{\beta}'_{\nu\mu'}\bar{\varrho}_{\mu'} \equiv 0 \;(\text{mod. } \Delta_{\tilde{\beta}})$$

bezeichnen; es gilt weiter bezüglich der Bedeutung von ϱ und der $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}$ das auf Seite 120 Bemerkte, es bezeichnen $\mathring{\tau}_1, \ldots, \mathring{\tau}_p$ beliebige ganze Zahlen, und es ist endlich zur Abkürzung gesetzt:

$$L^{(b,n)}_{\mathring{\varepsilon}_1\ldots\mathring{\varepsilon}_p} = \sum_{\substack{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p\\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu}\eta_{\nu}\eta'_{\nu}\pi i+\sum\limits_{\mu}\varkappa_{\mu}\lambda_{\mu}\pi i+\frac{2}{n}\sum\limits_{\nu}\left[\left(\mathring{\tau}_{\nu}+\frac{1}{2}\sum\limits_{\mu}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\eta_{\nu}-\left(\mathring{\delta}_{\nu}+\frac{1}{2}\sum\limits_{\mu}\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\eta'_{\nu}\right]\pi i}$$
$$\times K^{(b,n)}_{\mathring{\varepsilon}_1+\eta_1\ldots\mathring{\varepsilon}_p+\eta_p},$$

wobei $\mathring{\varepsilon}_1, \ldots, \mathring{\varepsilon}_p$ irgend welche ganze Zahlen bezeichnen.

Aus den Formeln (A), (A_1) erhält man, indem man an Stelle der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ specielle Zahlenwerthe einführt, die einer jeden beliebigen vorgelegten Transformation entsprechende Thetaformel. Von den zahlreichen bemerkenswerthen speciellen Transformationsformeln, welche auf diese Weise entstehen, seien zum Schlusse hier die vier folgenden aufgeführt.

Es werden die Lösungen der durch die Charakteristiken:

$$T_1 = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \ldots & 0 & & & \\ & \ldots & & & 0 & \\ 0 & \ldots & 1 & & & \\ \hline & & & \frac{1}{r} & \ldots & 0 \\ & 0 & & & \ldots & \\ & & & 0 & \ldots & \frac{1}{r} \end{array}\right|, \qquad T_1^{-1} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \ldots & 0 & & & \\ & \ldots & & & 0 & \\ 0 & \ldots & 1 & & & \\ \hline & & & r & \ldots & 0 \\ & 0 & & & \ldots & \\ & & & 0 & \ldots & r \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsprobleme durch die Formeln:

$$(\Theta_1)\qquad r^p\,\vartheta^r\begin{bmatrix} g\\ h\end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{0,1,\ldots,r-1} L^{(a,r)}_{\lambda_1\ldots\lambda_p}\,\vartheta\begin{bmatrix} rg\\ h+\frac{\lambda}{r}\end{bmatrix}(\!(v)\!)_b\, e^{-2\pi i\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_{\mu}\lambda_{\mu}},$$

$$(\bar{\Theta}_1)\qquad L^{(a,r)}_{\mathring{\lambda}_1\ldots\mathring{\lambda}_p}\,\vartheta\begin{bmatrix} k\\ l\end{bmatrix}(\!(v)\!)_b = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,r-1}\vartheta^r\begin{bmatrix} \frac{k+\varrho}{r}\\ l-\frac{\mathring{\lambda}}{r}\end{bmatrix}(\!(u)\!)_a\, e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(k_{\mu}+\varrho_{\mu})\mathring{\lambda}_{\mu}}$$

gegeben, bei denen die Grössen u, a mit den Grössen v, b durch die Gleichungen:

$$v_\nu = u_\nu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{a_{\nu\nu'}}{r}, \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

oder durch die damit äquivalenten:

$$u_\mu = v_\mu, \qquad a_{\mu\mu'} = r b_{\mu\mu'} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

verknüpft sind, bei denen ferner allgemein:

$$L^{(a,r)}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \sum_{i_1, \ldots, i_p}^{0, 1, \ldots, r-1} K^{(a,r)}_{i_1 \ldots i_p} \, e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} i_\mu \lambda_\mu}$$

gesetzt ist, und bei denen die g, h, k, l beliebige reelle Constanten, die $\mathring{\lambda}$ irgend welche ganze Zahlen bezeichnen.

Es werden ferner die Lösungen der durch die Charakteristiken:

$$T_2 = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{r} & \cdots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{r} & & & \\ \hline & & & \frac{1}{r} & \cdots & 0 \\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \cdots & \frac{1}{r} \end{array}\right|, \qquad T_2^{-1} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} r & \cdots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \cdots & r & & & \\ \hline & & & r & \cdots & 0 \\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \cdots & r \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsprobleme durch die Formeln:

$$(\Theta_2) \quad r^p \vartheta^{r^2}\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{\substack{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p}}^{0, 1, \ldots, r-1} L^{(a, r^2)}_{\substack{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p \\ \lambda_1 \ldots \lambda_p}} \vartheta\begin{bmatrix} rg + \frac{\varkappa}{r} \\ rh + \frac{\lambda}{r} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b \, e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \left(rg_\mu + \frac{\varkappa_\mu}{r}\right)\frac{\lambda_\mu}{r}},$$

$$(\overline{\Theta}_2) \quad r^p L^{(a, r^2)}_{\substack{\mathring{\varkappa}_1 \ldots \mathring{\varkappa}_p \\ \mathring{\lambda}_1 \ldots \mathring{\lambda}_p}} \vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b = \sum_{\substack{\varrho_1, \ldots, \varrho_p \\ \sigma_1, \ldots, \sigma_p}}^{0, 1, \ldots, r-1} \vartheta^{r^2}\begin{bmatrix} \frac{k}{r} - \frac{\mathring{\varkappa}}{r^2} + \frac{\varrho}{r} \\ \frac{l}{r} - \frac{\mathring{\lambda}}{r^2} + \frac{\sigma}{r} \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a \, e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} k_\mu \sigma_\mu + \frac{2\pi i}{r} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} (k_\mu + \varrho_\mu)\mathring{\lambda}_\mu}$$

gegeben, bei denen die Grössen u, a mit den Grössen v, b durch die Gleichungen:

$$v_\nu = r u_\nu, \qquad b_{\nu\nu'} = a_{\nu\nu'}, \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

oder durch die damit äquivalenten:

$$u_\mu = \frac{v_\mu}{r}, \qquad a_{\mu\mu'} = b_{\mu\mu'} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

verknüpft sind, bei denen ferner allgemein:

$$L^{(a, r^2)}_{\substack{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p \\ \lambda_1 \ldots \lambda_p}} = \sum_{i_1, \ldots, i_p}^{0, 1, \ldots, r-1} K^{(a, r^2)}_{ri_1 + \varkappa_1 \, \ldots \, ri_p + \varkappa_p} \, e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} i_\mu \lambda_\mu}$$

gesetzt ist, und bei denen die g, h, k, l beliebige reelle Constanten, die $\mathring{\varkappa}$, $\mathring{\lambda}$ irgend welche ganze Zahlen bezeichnen.



UNTERSUCHUNGEN

UEBER

DIE RIEMANN'SCHE THETAFORMEL

UND

DIE RIEMANN'SCHE CHARAKTERISTIKENTHEORIE

VON

Dr. FRIEDRICH PRYM

O. Ö. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT WÜRZBURG.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.



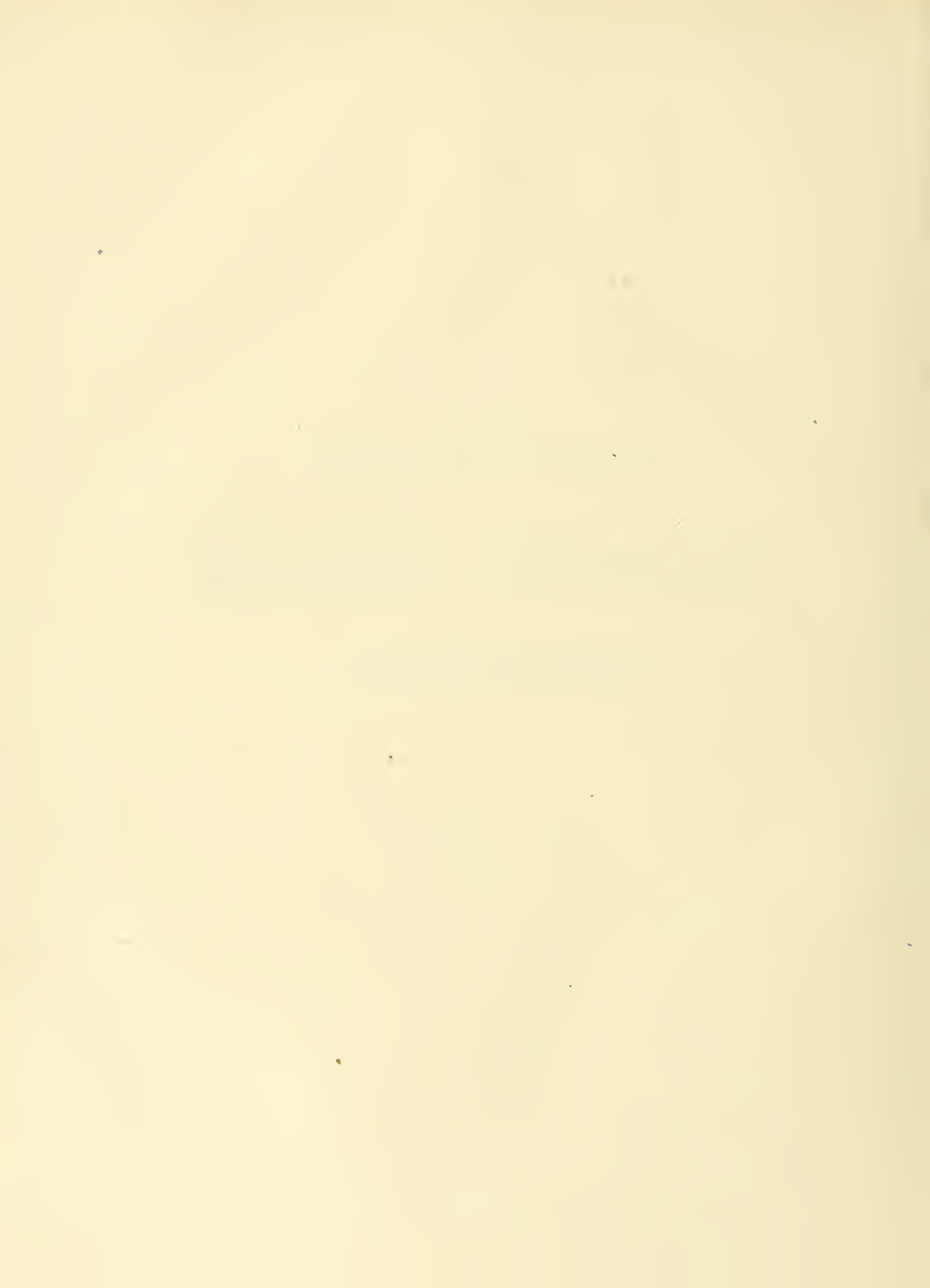
SEINEM

UNVERGESSLICHEN LEHRER

BERNHARD RIEMANN

IN DANKBARER ERINNERUNG

DER VERFASSER.



Vorwort.

Im Frühjahre 1865 war mir das Glück zu Theil geworden, bei meinem hochverehrten Lehrer *Riemann* in Pisa, wo derselbe sich seiner Gesundheit wegen aufhielt, einige Wochen zubringen zu können. Ich war damals mit gewissen Untersuchungen aus der Theorie der hyperelliptischen Functionen beschäftigt, deren Anfänge ich schon in meiner im Jahre 1864 in den Denkschriften der Wiener Akademie erschienenen Arbeit „Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen" anhangsweise veröffentlicht hatte, und es bildete während meines Aufenthaltes in Pisa unter anderem auch das Additionstheorem der hyperelliptischen Functionen einen Gegenstand meiner Studien. Bei dieser Gelegenheit wurde mir von *Riemann* eine Formel (Formel (12) der ersten Arbeit) mitgetheilt, die für die Theorie der Thetafunctionen als eine fundamentale anzusehen ist, und ich verfasste auf seine Anregung hin einen Beweis für diese Formel, dessen Gang auch die Zustimmung meines Lehrers fand. Zu einer Verwerthung der erwähnten Formel gelangte ich aber damals nicht, einmal, weil eine Verschlimmerung in dem Befinden *Riemann*'s weitere Besprechungen unmöglich machte, dann aber auch, weil eingehendere auf die Charakteristiken der Thetareihen bezügliche Untersuchungen, deren vorherige Durchführung mir nothwendig erschien, mich ganz in Anspruch nahmen.

Zur Fortsetzung der damals begonnenen und dann unterbrochenen Untersuchungen, zu deren Wiederaufnahme meine in der Zwischenzeit ausgeführten, auf anderen Gebieten sich bewegenden Arbeiten keinen Anlass boten, wurde ich durch einen Zufall veranlasst. Im Herbste des Jahres 1878 kam mir nämlich auf buchhändlerischem Wege eine Arbeit des Herrn *Puchta**) zu, in der ein gewisses System von 2^n linearen, aus denselben 2^n Variablen mit Hülfe der Coefficienten $+1$ und -1 gebildeten Formen (vgl. im Folgenden die Tabellen pag. 81) auftritt, welches mein Interesse insofern in Anspruch nahm, als in ihm das in der *Riemann*'schen Thetaformel vorkommende System der vier Formen $u+v+w+t$, $u+v-w-t$, $u-v+w-t$, $u-v-w+t$ als specieller Fall enthalten ist. Indem ich das Gesetz der Coefficienten dieses Systems in allgemeiner Gestalt zu gewinnen suchte, gelangte ich bald zu den Beziehungen, welche zwischen diesen Coefficienten und den 2^n zur Zahl n gehörigen einreihigen Charakteristiken bestehen. Dadurch angeregt nahm ich die Untersuchungen über die *Riemann*'sche Thetaformel wieder auf und erkannte, nachdem ich dieselbe in die allgemeinere Gestalt (12') gebracht hatte, dass ein mit den erwähnten linearen Formen in directem Zusammenhange stehendes System linearer Gleichungen (System (S) auf Seite 84) existirt, das für die Untersuchung der zwischen den verschiedenen Thetafunctionen bestehenden Beziehungen insofern von fundamentaler Bedeutung ist,

*) *Puchta*, Ein Determinantensatz und seine Umkehrung. Denkschriften der math.-naturw. Classe der Wiener Akademie, Bd. XXXVIII, 1878.

als es in gewissen aus ihm ableitbaren Gleichungen die Grundtypen für die Additionstheoreme der Thetafunctionen und für die damit zusammenhangenden allgemeinen Thetarelationen liefert. Die Resultate dieser und anderer damit in enger Beziehung stehender Untersuchungen habe ich in den nachstehenden fünf Arbeiten niedergelegt, und ich erlaube mir hier noch Folgendes über die einzelnen Arbeiten und den Zusammenhang derselben mitzutheilen.

Naturgemäss beschäftigt sich die erste Arbeit mit der Herstellung der *Riemann*schen Thetaformel. Das hier zur Gewinnung derselben mitgetheilte Verfahren ist im wesentlichen mit dem in Pisa eingeschlagenen identisch. Dasselbe hätte unter Anwendung der in der zweiten Arbeit entwickelten Methoden leicht durch ein kürzeres ersetzt werden können; für die Beibehaltung des vorliegenden war der Umstand entscheidend, dass dasselbe in den wesentlichen Punkten die Zustimmung *Riemann*'s erhalten hatte, und weiter auch noch der, dass das im Anfange der Arbeit, in Art. 2, dargelegte Princip der Zerlegung einer periodischen Function von *Riemann* herrührt und von ihm schon in den Vorlesungen des Wintersemesters 1861/62 als ein für die Theorie der Thetafunctionen fundamentales bezeichnet wurde. Handelt es sich nur darum, die Formel (12) überhaupt zu erhalten, so führt, wie ich in einer im Journal von Crelle demnächst erscheinenden Abhandlung zeigen werde, ein ungemein einfacher Weg zu diesem Ziele. Der in Art. 3 gelieferte Beweis für die Linearunabhängigkeit der 2^{2p} Thetafunctionen kann, ebenso wie der in Art. 3 der zweiten Arbeit enthaltene, auf Grund der im Anfange der fünften Arbeit durchgeführten Untersuchungen, durch einen eleganteren ersetzt werden. Die auf Seite 20 stehende Betrachtung, sowie einzelne Zusätze sind erst jetzt bei der Ausarbeitung hinzugekommen.

Es darf nicht unerwähnt bleiben, dass Herr *Frobenius* in seinen schönen Untersuchungen über das Additionstheorem der Thetafunctionen*) auf einem von dem hier eingeschlagenen ganz verschiedenen Wege zu einer Formel gelangt ist, die ohne Mühe in die *Riemann*'sche Thetaformel übergeführt werden kann. Da aber die Formel des Herrn *Frobenius* in dessen Theorie einen mehr secundären Charakter hat, und die Methoden, die zu ihr führen, das innere Wesen dieser Formel nicht erkennen lassen, auch die Form derselben nicht die charakteristische ist, wie die der *Riemann*'schen, so wird es wohl keiner weiteren Rechtfertigung mehr bedürfen, dass ich der Formel (12) den Namen der *Riemann*'schen Thetaformel beigelegt habe.

Der Einblick in die wahre Natur dieser Formel wird aber erst erhalten, wenn man das der Formel zu Grunde liegende System der vier Formen $u+v+w+t$, $u+v-w-t$, $u-v+w-t$, $u-v-w+t$ als besonderen Fall eines allgemeineren Systems linearer Formen auffasst. Dieses allgemeinere System liegt den Untersuchungen der zweiten Arbeit zu Grunde, die von mir im Jahre 1879 ausschliesslich zu dem Zwecke, die Natur der Formel nach jeder Richtung klar zu stellen, begonnen wurden. Durch sie verliert die *Riemann*'sche Thetaformel die isolirte Stellung, die sie bis dahin inne hatte, und erscheint als ein einzelnes Individuum in einer Gesammtheit ähnlicher Formeln, die auch für weitere Untersuchungen verwendbar sein dürften.

Handelt es sich nun um die Verwerthung der *Riemann*'schen Thetaformel, so bedarf man gewisser Sätze über Charakteristiken, die in der dritten und vierten Arbeit beigebracht sind. Die in der dritten Arbeit vorkommenden Sätze über die Zerlegung

*) *Frobenius*, Ueber das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variabeln. Crelle's Journal, Bd. 89, pag. 185. Die im Texte erwähnte Formel ist die Formel (5.), pag. 201.

einer Charakteristik in zwei andere wurden von *Riemann* in den Vorlesungen des Sommersemesters 1862, der Kürze der Zeit wegen ohne Beweis, mitgetheilt. Er erwähnte dabei, dass diese Sätze durch den Schluss von p auf $p+1$ bewiesen werden könnten; jedoch kann der so geführte Beweis wegen der dabei nöthigen Unterscheidung verschiedener Fälle unter keinen Umständen als ein eleganter oder gar in das Wesen der Sache eindringender bezeichnet werden. Der von mir in der dritten Arbeit gegebene Beweis dürfte wohl der einfachste und natürlichste sein.

Die vierte Arbeit beschäftigt sich speciell mit jenen merkwürdigen Systemen von $2p+1$ und $2p+2$ Charakteristiken, die in der Theorie der hyperelliptischen Integrale ihren Ursprung und bei den zu diesen Integralen gehörigen Thetafunctionen ihre erste Anwendung gefunden haben, die aber zugleich auch, wie bereits *Riemann* hervorgehoben hat, die Hülfsmittel für die Behandlung gewisser auf die allgemeinen Thetafunctionen bezüglicher Probleme liefern. Wie ich schon in meiner im Jahre 1866 erschienenen Arbeit: „Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche“ mitgetheilt habe, hat *Riemann*, sowohl in den Vorlesungen des Sommersemesters 1862, wie auch bei den Besprechungen, die ich mit ihm in Pisa hatte, seine auf diese Systeme bezügliche Theorie immer nur an einem speciellen Systeme entwickelt; es war dies gewöhnlich das folgende:

$$\begin{array}{ll}
[a_1] = \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)^{p-1}\right] \quad , & [a_2] = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)^{p-1}\right] \quad , \\
[a_3] = \left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&1\end{smallmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)^{p-2}\right] \quad , & [a_4] = \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)^{p-2}\right] \quad , \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
[a_{2\nu-1}] = \left[\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)^{\nu-1}\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)^{p-\nu}\right], & [a_{2\nu}] = \left[\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)^{\nu-1}\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)^{p-\nu}\right], \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
[a_{2p-1}] = \left[\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)^{p-1}\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right] \quad , & [a_{2p}] = \left[\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)^{p-1}\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right] \quad , \\
\end{array}$$

$$[a_{2p+1}] = \left[\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)^{p}\right].$$

Die Sätze wurden in allen Fällen durch den Schluss von p auf $p+1$ bewiesen, und aus dem Systeme $[a_1], [a_2], \ldots, [a_{2p+1}]$ wurde dann unter Hinzunahme einer willkürlichen Charakteristik $[a_0]$ das mit ähnlichen Eigenschaften versehene allgemeinere System:

$$[a'_1] = [a_0] + [a_1],\ [a'_2] = [a_0] + [a_2],\ \ldots.,\ [a'_{2p+1}] = [a_0] + [a_{2p+1}],\ [a'_{2p+2}] = [a_0]$$

abgeleitet. Wie ich aus gewissen Aeusserungen *Riemann's* schliessen zu müssen glaube, beabsichtigte derselbe, die Ausdehnung dieser Sätze auf alle den verschiedenen Zerlegungen der Fläche T entsprechenden Charakteristikensysteme mit Hülfe der Theorie der linearen Transformation zu bewirken. Mich dagegen forderte er während meiner Anwesenheit in Pisa auf, den Beweis dieser Sätze auf Grund seiner im Manuscripte vorliegenden und später im Journal von Crelle veröffentlichten Untersuchungen über das Verschwinden der Thetafunctionen zu versuchen. Diesen Beweis habe ich geliefert und in meiner soeben erwähnten Arbeit mitgetheilt. Die in der vierten Arbeit entwickelte Charakteristikentheorie ist also für einen speciellen Fall schon von *Riemann* aufgestellt worden; nur die in Art. 4 dieser Arbeit besprochene Beziehung $(-1)^{[a_\mu]\,[a_\nu]} = -1$, die zwischen je zwei Charakteristiken $[a_\mu]$, $[a_\nu]$ eines Systems $[a_1], [a_2], \ldots, [a_{2p+1}]$ der erwähnten Art besteht, hat derselbe mir gegenüber niemals erwähnt, und es bedarf daher die von Herrn *H. Stahl**) in seiner Arbeit über Thetacharakteristiken

*) *Stahl, H.*, Beweis eines Satzes von Riemann über ϑ-Charakteristiken. Crelle's Journal, Bd. 88, pag. 276.

gemachte Angabe, dass schon *Riemann* dieselbe aufgestellt habe, einer Berichtigung. Auf diese Beziehung zuerst aufmerksam gemacht zu haben, ist vielmehr das Verdienst des Herrn *H. Stahl.* Dass in dieser Relation das wahre Wesen der erwähnten Charakteristikensysteme zu suchen ist, geht sowohl aus den auf diese Systeme bezüglichen, in oben citirter Arbeit enthaltenen Betrachtungen des Herrn *Frobenius*, wie auch aus den von mir unter Benutzung dieser Relation durchgeführten Untersuchungen unzweifelhaft hervor.

Die Anfänge der fünften Arbeit stammen, wie schon erwähnt wurde, aus dem Jahre 1878, und es bildete speciell die Gewinnung der in Art. 8 aufgestellten Fundamentalformel (U) von Anfang an das Hauptziel meiner Bestrebungen. Zu den Untersuchungen des Art. 7 dagegen wurde ich erst später, durch das Studium einer inzwischen erschienenen, auf Seite 110 citirten Arbeit des Herrn *Nöther* und der schon erwähnten Arbeit des Herrn *Frobenius*, veranlasst. In Folge der Untersuchungen der fünften Arbeit wird von jetzt an die *Riemann*'sche Thetaformel als die eigentliche Fundamentalformel für die ganze hierhergehörige Theorie der Thetafunctionen angesehen werden müssen, und es ist damit zugleich die zur Herstellung der verschiedenen Thetarelationen bis jetzt ausschliesslich benutzte Methode der unbestimmten Coefficienten, die immer etwas künstliches hat und in den wenigsten Fällen die wahre Natur der entstandenen Formel erkennen lässt, als antiquirt zu betrachten und durch die hier gegebenen neuen, noch weiterer Ausbildung fähigen Methoden zu ersetzen, bei denen die ganze Untersuchung auf die Untersuchung eines Systems linearer Gleichungen reducirt ist. In welcher Weise die hier gegebenen Methoden zu verwenden sind, wird am besten durch die Behandlung eines speciellen Falles dargethan. Auf meine Anregung hin hat Herr *Krazer*, der als mein Schüler an den vorliegenden Untersuchungen regen Antheil genommen, und dem ich an dieser Stelle für die mir dabei gewährte Unterstützung meinen besten Dank ausspreche, die Behandlung des Falles $p = 2$ nach den hier entwickelten Principien unternommen. Die betreffende, in demselben Verlage erschienene Arbeit schliesst sich unmittelbar an die vorliegende an und wird durch ihre sorgfältige Ausführung nicht verfehlen, das Interesse der Mathematiker wach zu rufen.

Jede der fünf Arbeiten war zunächst als selbständiges Ganzes abgefasst worden; erst später entschloss ich mich, dieselben in der vorliegenden Reihenfolge zusammenzufassen; dadurch erklärt sich die Wiederholung gewisser Betrachtungen, namentlich über Charakteristiken. Dass trotzdem ein inniger Zusammenhang zwischen den einzelnen Arbeiten besteht, wird der kundige Leser erkennen.

Schliesslich ist es mir eine angenehme Pflicht, dem Herrn Verleger für die Bereitwilligkeit, mit der er auf meine Wünsche bezüglich der Ausstattung dieser Arbeit eingegangen ist, an dieser Stelle meinen besten Dank zu sagen.

Würzburg, im September 1881.

F. Prym.

I.

Die Riemann'sche Thetaformel.



1.

Die *Riemann*'sche p-fach unendliche ϑ-Reihe:

$$\vartheta(v_1|v_2 \ldots |v_p) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu v_\mu},$$

bei der die Grössen $a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$ nur den für die Convergenz der Reihe nothwendigen Bedingungen unterworfen sein sollen, stellt eine einwerthige und für endliche v auch immer stetige Function der complexen Veränderlichen $v_1\, v_2 \ldots v_p$ dar, die den Gleichungen:

$$(1) \qquad \vartheta(v_1| \ldots |v_\nu + \pi i| \ldots |v_p) = \vartheta(v_1| \ldots |v_\nu| \ldots |v_p).$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$(2) \qquad \vartheta(v_1 + a_{1\nu}|v_2 + a_{2\nu}| \ldots |v_p + a_{p\nu}) = \vartheta(v_1|v_2| \ldots |v_p) e^{-2v_\nu - a_{\nu\nu}}.$$

$$(3) \qquad 4\frac{\partial \vartheta(v_1| \ldots |v_p)}{\partial a_{\nu\nu}} = \frac{\partial^2 \vartheta(v_1| \ldots |v_p)}{\partial v_\nu^2}, \qquad 2\frac{\partial \vartheta(v_1| \ldots |v_p)}{\partial a_{\nu\nu'}} = \frac{\partial^2 \vartheta(v_1| \ldots |v_p)}{\partial v_\nu\, \partial v_{\nu'}}, \qquad \nu' \gtrless \nu \quad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

genügt. Erfüllt umgekehrt eine einwerthige und für endliche v auch stetige Function der complexen Veränderlichen $v_1|v_2 \ldots v_p$ die Gleichungen (1), (2), so kann sie sich von der Function $\vartheta(v_1|v_2| \ldots v_p)$ nur um einen von den v freien Factor unterscheiden; erfüllt sie ausserdem noch die Gleichungen (3), so ist dieser Factor auch von den Grössen a unabhängig.

Die obige Function ist ein besonderer Fall der folgenden allgemeineren:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(v_1| \cdots |v_p) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(m_\mu + \frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(m_{\mu'} + \frac{\varepsilon_{\mu'}}{2}\right) + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(m_\mu + \frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(v_\mu + \frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i\right)},$$

bei der die $\varepsilon, \varepsilon'$ ganze Zahlen bezeichnen; sie entsteht aus dieser, wenn man für die $\varepsilon, \varepsilon'$ durchweg den Werth Null setzt, d. h. es ist:

$$\vartheta\begin{bmatrix}0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0\end{bmatrix}(v_1|v_2| \ldots |v_p) = \vartheta(v_1|v_2| \ldots |v_p).$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Functionen wird vermittelt durch die Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(v_1|\dots|v_p) = \vartheta\left(v_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\frac{\varepsilon_\mu}{2}a_{1\mu} + \frac{\varepsilon'_1}{2}\pi i \,\middle|\, \dots \,\middle|\, v_p + \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\frac{\varepsilon_\mu}{2}a_{p\mu} + \frac{\varepsilon'_p}{2}\pi i\right)$$

$$\times e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\frac{\varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu'}}{4} + \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu\left(v_\mu + \frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i\right)},$$

und es genügt die allgemeinere Function ähnlich wie die ursprüngliche den Gleichungen:

$$(1') \quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(v_1|\dots|v_\nu + \pi i|\dots|v_p) = \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(v_1 \dots|v_\nu|\dots|v_p)\, e^{\varepsilon_\nu \pi i},$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, p)$$

$$(2') \quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(v_1 + a_{1\nu}|\dots|v_p + a_{p\nu}) = \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(v_1|\dots|v_p)\, e^{-2v_\nu - a_{\nu\nu} + \varepsilon'_\nu \pi i},$$

$$(3') \quad \begin{aligned} 4\frac{\partial\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(v_1|\dots|v_p)}{\partial a_{\nu\nu}} &= \frac{\partial^2\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(v_1|\dots|v_p)}{\partial v_\nu^2}, \\ 2\frac{\partial\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(v_1|\dots|v_p)}{\partial a_{\nu\nu'}} &= \frac{\partial^2\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(v_1|\dots|v_p)}{\partial v_\nu\, \partial v_{\nu'}}. \end{aligned} \qquad \begin{matrix}\nu' \gtrless \nu \\ (\nu, \nu' = 1, 2, \dots, p)\end{matrix}$$

Erfüllt umgekehrt eine einwerthige und für endliche v auch stetige Function der complexen Veränderlichen $v_1|v_2|\dots|v_p$ die Gleichungen (1′), (2′), so kann sie sich von der Function $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(v_1|\dots|v_p)$ nur um einen von den v freien Factor unterscheiden; erfüllt sie ausserdem noch die Gleichungen (3′), so ist dieser Factor auch von den Grössen a unabhängig.

Das Symbol $\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}$ wird die Charakteristik der ϑ-Function genannt und soll, wenn dadurch kein Missverständniss zu befürchten, abgekürzt durch $\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}$, noch einfacher durch $[\varepsilon]$ bezeichnet werden. Ferner möge es erlaubt sein, wenn die Ausdrücke für die Argumente einer ϑ-Function sich nur durch untere Indices unterscheiden, hinter dem Functionszeichen nur den allgemeinen Ausdruck für die Argumente, mit Weglassung des Index, in doppelte Klammern eingeschlossen zu schreiben, also $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}((v))$ für $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(v_1|v_2|\dots|v_p)$, und entsprechend ein Grössensystem $v_1|v_2|\dots|v_p$ einfacher durch (v) zu bezeichnen. Bezeichnet man dann endlich noch das System:

$$v_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\frac{\varkappa_\mu}{2}a_{1\mu} + \frac{\varkappa'_1}{2}\pi i \,\Big|\, \dots \,\Big|\, v_p + \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\frac{\varkappa_\mu}{2}a_{p\mu} + \frac{\varkappa'_p}{2}\pi i,$$

wobei unter den $\varkappa, \varkappa'$ ganze Zahlen zu verstehen sind, symbolisch mit $\left(v + \begin{vmatrix}\varkappa \\ \varkappa'\end{vmatrix}\right)$, so ergeben sich aus den beiden für die Function $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}((v))$ oben aufgestellten Ausdrücken die folgenden Relationen:

$$(A)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}\left(\!\!\left(v+\begin{matrix}\varkappa\\ \varkappa'\end{matrix}\right)\!\!\right)=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\varkappa\\ \varepsilon'+\varkappa'\end{bmatrix}((v))\,e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}a_{\mu\mu'}\frac{\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'}}{4}-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varkappa_\mu\left(v_\mu+\frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i+\frac{\varkappa'_\mu}{2}\pi i\right)},$$

$$(B_1)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu\pm 2\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_\nu\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((v))=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_\nu\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((v)),$$

$$(\nu=1,2,\ldots,p)$$

$$(B_2)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_\nu\pm 2\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((v))=(-1)^{\varepsilon_\nu}\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_\nu\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((v)).$$

$$(C)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((-v))=(-1)^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\varepsilon_\nu\varepsilon'_\nu}\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((v)).$$

Die Gleichungen (B_1), (B_2) zeigen, dass, wenn man von den constanten Factoren $+1$ und -1 absieht, im Ganzen nur 2^{2p} wesentlich verschiedene Functionen $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((v))$ existiren, welche man erhält, indem man für die $2p$ Grössen ε, ε' auf alle möglichen Weisen die Zahlen 0 und 1 setzt. Eine solche Charakteristik, in der nur die Zahlen 0 und 1 vorkommen, soll eine Normalcharakteristik genannt werden. Die Formel (C) zeigt dann weiter, dass jede Function $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((v))$ entweder eine gerade oder eine ungerade Function ist, je nachdem $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\varepsilon_\nu\varepsilon'_\nu\equiv 0 \pmod{2}$ oder $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\varepsilon_\nu\varepsilon'_\nu\equiv 1 \pmod{2}$ ist. Setzt man in der Formel (A) allgemein $\varkappa_\nu=2\lambda_\nu$, $\varkappa'_\nu=2\lambda'_\nu$, indem man unter λ, λ' ganze Zahlen versteht, und wendet dann die Formeln (B) an, so erhält man die ebenfalls später zur Verwendung kommende Formel:

$$(D)\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}\left(\!\!\left(v+\begin{matrix}2\lambda\\ 2\lambda'\end{matrix}\right)\!\!\right)=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((v))\,e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}a_{\mu\mu'}\lambda_\mu\lambda_{\mu'}-2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\lambda_\mu v_\mu+\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\lambda'_\mu+\varepsilon'_\mu\lambda_\mu)\pi i},$$

welch' letztere als specielle Fälle die schon oben angeführten Formeln:

$$(D_1)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(v_1|\ldots|v_\nu+\pi i|\ldots|v_p)=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(v_1|\ldots|v_\nu|\ldots|v_p)\,e^{\varepsilon_\nu\pi i},$$

$$(\nu=1,2,\ldots,p)$$

$$(D_2)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(v_1+a_{1\nu}|\ldots|v_p+a_{p\nu})=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(v_1|\ldots|v_p)\,e^{-2v_\nu-a_{\nu\nu}+\varepsilon'_\nu\pi i}$$

umfasst.

2.

Das zuerst von *Jacobi**) in der Theorie der ϑ-Functionen einer Variable und später von Herrn *Rosenhain***) in der Theorie der ϑ-Reihen von zwei Variablen verwandte System linearer Gleichungen:

---

*) *C. G. J. Jacobi's* Gesammelte Werke. Berlin 1881, Reimer. Band I. pag. 503.

**) Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des fonctions ultra-elliptiques de la première classe par *M. George Rosenhain.* Recueil des savants étrangers de l'académie des sciences de Paris. Tome XI.

$$u + v + w + t = 2u',$$
$$u + v - w - t = 2v',$$
$$u - v + w - t = 2w',$$
$$u - v - w + t = 2t',$$

ist dadurch ausgezeichnet, dass es, nach u, v, w, t als Unbekannten aufgelöst, das gleichgebaute System:

$$u' + v' + w' + t' = 2u,$$
$$u' + v' - w' - t' = 2v,$$
$$u' - v' + w' - t' = 2w,$$
$$u' - v' - w' + t' = 2t,$$

ergibt; man kann daher in allen auf Grund dieses Systems abgeleiteten Resultaten, die u, v, w, t als unabhängige Veränderliche enthalten, u, v, w, t mit u', v', w', t' beziehlich vertauschen. Systeme dieser Art können auch in der Theorie der allgemeinen ϑ-Reihen mit grossem Nutzen angewandt werden, wie die folgende Untersuchung zeigen wird.

Man bilde, unter $u_\nu, v_\nu, w_\nu, t_\nu$, $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ unabhängige Veränderliche verstanden, p Systeme von je vier Gleichungen, das ν^{te} von der Form:

$$(S_\nu) \qquad \begin{aligned} u_\nu + v_\nu + w_\nu + t_\nu &= 2u'_\nu, \\ u_\nu + v_\nu - w_\nu - t_\nu &= 2v'_\nu, \\ u_\nu - v_\nu + w_\nu - t_\nu &= 2w'_\nu, \\ u_\nu - v_\nu - w_\nu + t_\nu &= 2t'_\nu, \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

so erhält man aus diesen p Systemen, durch Auflösung eines jeden nach den in ihm vorkommenden Variablen u, v, w, t als Unbekannten, p gleichgebaute Systeme, das ν^{te} von der Form:

$$(S'_\nu) \qquad \begin{aligned} u'_\nu + v'_\nu + w'_\nu + t'_\nu &= 2u_\nu, \\ u'_\nu + v'_\nu - w'_\nu - t'_\nu &= 2v_\nu, \\ u'_\nu - v'_\nu + w'_\nu - t'_\nu &= 2w_\nu, \\ u'_\nu - v'_\nu - w'_\nu + t'_\nu &= 2t_\nu. \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

Bildet man dann das Product von vier, dieselbe Characteristik $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ besitzenden ϑ-Functionen mit den Argumenten:

$$(u + v + w + t), \;\; (u + v - w - t), \;\; (u - v + w - t), \;\; (u - v - w + t)$$

beziehlich, so kann man dieses Product, indem man zunächst von den Grössen v, w, t absieht, als Function der p Veränderlichen $2u_1 | 2u_2 | \ldots | 2u_p$ betrachten und dementsprechend mit $f(2u_1 | 2u_2 | \ldots | 2u_p)$ bezeichnen, so dass also:

$$(1) \;\; f(2u_1\, 2u_2 \ldots 2u_p) = \vartheta((u+v+w+t))\,\vartheta((u+v-w-t))\,\vartheta((u-v+w-t))\,\vartheta((u-v-w+t))$$

ist. Die so definirte Function $f((2u))$ ist dann eine einwerthige und für alle endlichen Werthe der u auch stetige Function der complexen Variablen $2u_1 | 2u_2 | \dots | 2u_p$, die

1) in Bezug auf jede Variable $2u_\nu$ periodisch ist mit der Periode $2\pi i$,

2) beim Uebergange von

$$2u_1 | 2u_2 | \dots | 2u_p \text{ in } 2u_1 + 2a_{1\nu} | 2u_2 + 2a_{2\nu} | \dots | 2u_p + 2a_{p\nu}$$

den Factor $e^{-8u_\nu - 4a_{\nu\nu}}$ erlangt,

oder die, was dasselbe sagt, den Gleichungen:

$$(1') \quad \begin{aligned} &1)\ f(2u_1 | \dots | 2u_\nu + 2\pi i | \dots | 2u_p) = f(2u_1 | \dots | 2u_\nu | \dots | 2u_p), \\ &2)\ f(2u_1 + 2a_{1\nu} | \dots | 2u_p + 2a_{p\nu}) = f(2u_1 | \dots | 2u_p) e^{-8u_\nu - 4a_{\nu\nu}} \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \dots, p)$$

genügt.

Ist $f(x)$ eine in Bezug auf die Variable x mit der Periode $2\pi i$ periodische Function, so kann man dieselbe immer, unter Anwendung der Identität:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(x + \pi i)}{2} + \frac{f(x) - f(x + \pi i)}{2},$$

als Summe zweier anderer Functionen darstellen, von denen die erste, $\frac{1}{2}[f(x) + f(x + \pi i)]$, periodisch ist mit der Periode πi, oder was dasselbe, bei Aenderung von x um πi den Factor $+1$ erlangt, die zweite, $\frac{1}{2}[f(x) - f(x + \pi i)]$, dagegen bei Aenderung von x um πi den Factor -1 erlangt. Unter Anwendung dieses Princips kann man die Function $f(2u_1 | \dots | 2u_p)$, indem man sie zunächst als Function von $2u_1$ betrachtet, als Summe zweier Functionen f_1, f_2 darstellen, von denen die erste, f_1, bei Aenderung von $2u_1$ um πi den Factor $+1$, die zweite, f_2, den Factor -1 erlangt, während eine jede derselben in Bezug auf die noch übrigen Variablen $2u_2 | \dots | 2u_p$ periodisch ist mit der Periode $2\pi i$. Einen jeden dieser beiden Summanden f_1, f_2 kann man daher, indem man ihn als Function von $2u_2$ betrachtet, nach demselben Verfahren weiter zerlegen: f_1 in $f_{1,1} + f_{1,2}$, f_2 in $f_{2,1} + f_{2,2}$; jeden dieser neuen Summanden, indem man ihn als Function von $2u_3$ betrachtet, wieder in zwei Theile, und erhält auf diese Weise schliesslich die Function f dargestellt als eine Summe von 2^p anderen Functionen φ, die so beschaffen sind, dass sie bei Aenderung von $2u_\nu$ um πi, welchen Werth auch ν besitzen mag, jedesmal zur Hälfte den Factor $+1$, zur andern Hälfte den Factor -1 annehmen, und es sind, wie man leicht einsieht, diese Functionen φ unabhängig von der für die successive Zerlegung eingehaltenen Reihenfolge der Variablen. Eine dieser Functionen φ ist also in Unterscheidung von den übrigen bestimmt durch die Bedingung, dass sie bei Aenderung von $2u_1$ um πi den Factor $(-1)^{\varepsilon_1}$, bei Aenderung von $2u_2$ um πi den Factor $(-1)^{\varepsilon_2}$, endlich bei Aenderung von $2u_p$ um πi den Factor $(-1)^{\varepsilon_p}$ erlangt, wobei allgemein ε_ν entweder den Werth 0 oder den Werth 1 vertritt, während sie, wie aus ihrer Entstehung hervorgeht, zugleich mit allen übrigen Functionen φ bei Aenderung von $2u_1 | \dots | 2u_p$ um $2a_{1\nu} | \dots | 2a_{p\nu}$ den Factor $e^{-8u_\nu - 4a_{\nu\nu}}$ erlangt;

in Folge dessen kann eine solche Function φ passend durch $\varphi[\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p](2u_1 \mid \ldots \mid 2u_p)$ bezeichnet werden, und man hat dann:

$$(2) \qquad f(2u_1 \mid \ldots \mid 2u_p) = \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p}^{0,1} \varphi[\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p](2u_1 \mid \ldots \mid 2u_p),$$

wobei die Summation über alle 2^p Formen φ auszudehnen ist, die entstehen, indem man in $[\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p]$ für die ε auf alle möglichen Weisen die Zahlen 0 und 1 einführt.

Die dem Falle $p = 2$ entsprechende Zerlegung:

$$f(2u_1 \mid 2u_2)$$

$$= \left.\frac{f(2u_1 \mid 2u_2) + f(2u_1 + \pi i \mid 2u_2) + f(2u_1 \mid 2u_2 + \pi i) + f(2u_1 + \pi i \mid 2u_2 + \pi i)}{4}\right\} = \varphi[0\,0](2u_1 \mid 2u_2)$$

$$+ \left.\frac{f(2u_1 \mid 2u_2) + f(2u_1 + \pi i \mid 2u_2) - f(2u_1 \mid 2u_2 + \pi i) - f(2u_1 + \pi i \mid 2u_2 + \pi i)}{4}\right\} = \varphi[0\,1](2u_1 \mid 2u_2)$$

$$+ \left.\frac{f(2u_1 \mid 2u_2) - f(2u_1 + \pi i \mid 2u_2) + f(2u_1 \mid 2u_2 + \pi i) - f(2u_1 + \pi i \mid 2u_2 + \pi i)}{4}\right\} = \varphi[1\,0](2u_1 \mid 2u_2)$$

$$+ \left.\frac{f(2u_1 \mid 2u_2) - f(2u_1 + \pi i \mid 2u_2) - f(2u_1 \mid 2u_2 + \pi i) + f(2u_1 + \pi i \mid 2u_2 + \pi i)}{4}\right\} = \varphi[1\,1](2u_1 \mid 2u_2)$$

möge das Gesagte veranschaulichen.

Die Function $\varphi[\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p](2u_1 \mid \ldots \mid 2u_p)$ genügt, wie soeben ausgeführt wurde, den folgenden Gleichungen:

$$(2') \quad \begin{aligned} &1)\ \varphi[\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p](2u_1 \mid \ldots \mid 2u_\nu + \pi i \mid \ldots \mid 2u_p) = \varphi[\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p](2u_1 \mid \ldots \mid 2u_\nu \mid \ldots \mid 2u_p) e^{\varepsilon_\nu \pi i}, \\ &2)\ \varphi[\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p](2u_1 + 2a_{1\nu} \mid \ldots \mid 2u_p + 2a_{p\nu}) = \varphi[\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p](2u_1 \mid \ldots \mid 2u_p) e^{-8u_\nu - 4a_{\nu\nu}}. \end{aligned} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

Durch Multiplication mit einer passend gewählten Exponentialgrösse kann dieselbe in eine Function von $2u_1 \mid \ldots \mid 2u_p$ verwandelt werden, die bei einer Aenderung des Variablensystems $2u_1 \mid \ldots \mid 2u_p$ um ein beliebiges System $2a_{1\nu} \mid \ldots \mid 2a_{p\nu}$ ungeändert bleibt. Zu dem Ende bezeichne man die bei unbedingt convergirender ϑ-Reihe nicht verschwindende Determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{pp}$ der ϑ-Constanten $a_{\mu\mu'}$ mit Δ, die ersten Unterdeterminanten derselben mit $\alpha_{\mu\mu'}$; es ist dann wegen $a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$ auch $\alpha_{\mu\mu'} = \alpha_{\mu'\mu}$, und es findet für je zwei Indices μ', ν die Gleichung:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\alpha_{\mu\mu'} a_{\mu\nu}}{\Delta} = \begin{matrix} 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \nu \\ 1, \text{ wenn } \mu' = \nu \end{matrix}$$

statt. Setzt man dann:

$$(3) \quad \varphi'[\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p](2u_1 \mid \ldots \mid 2u_p) = \varphi[\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p](2u_1 \mid \ldots \mid 2u_p) e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} \frac{\alpha_{\mu\mu'}}{\Delta} (2u_\mu)(2u_{\mu'})}$$

und berücksichtigt, dass:

$$e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}\frac{a_{\mu\mu'}}{\Delta}(2u_\mu+2a_{\mu\nu})(2u_{\mu'}+2a_{\mu'\nu})} = e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu=p}\frac{a_{\mu\mu'}}{\Delta}(2u_\mu)(2u_{\mu'})}\, e^{\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}(8u_{\mu'}+4a_{\mu'\nu})\left(\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\frac{a_{\mu\mu'}a_{\mu\nu}}{\Delta}\right)}$$

$$= e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}\frac{a_{\mu\mu'}}{\Delta}(2u_\mu)(2u_{\mu'})}\, e^{8u_\nu+4a_{\nu\nu}}$$

ist, so sieht man sofort, dass die Function $\varphi'[\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p](2u_1 | \dots | 2u_p)$ der oben gestellten Bedingung, bei Aenderung von $2u_1 | \dots | 2u_p$ um $2a_{1\nu} | \dots | 2a_{p\nu}$ ungeändert zu bleiben, genügt. Bei Aenderung von $2u_\nu$ um πi erlangt sie dagegen eine Exponentialgrösse als Factor. Ihr Verhalten wird characterisirt durch die beiden Gleichungen:

$$(3')\quad \begin{cases} 1)\ \varphi'[\varepsilon_1\dots\varepsilon_p](2u_1 \dots | 2u_\nu+\pi i | \dots 2u_p) = \varphi'[\varepsilon_1\dots\varepsilon_p](2u_1 \dots 2u_\nu \dots 2u_p)\, e^{\varepsilon_\nu \pi i - \frac{a_{\nu\nu}}{\Delta}\pi^2 + 4\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\frac{a_{\mu\nu}u_\mu}{\Delta}}, \\ 2)\ \varphi'[\varepsilon_1\dots\varepsilon_p](2u_1+2a_{1\nu} | \dots | 2u_p+2a_{p\nu}) = \varphi'[\varepsilon_1\dots\varepsilon_p](2u_1 | \dots | 2u_p)\,. \end{cases} \quad (\nu=1,2,\dots p)$$

Um im Folgenden die Untersuchung nicht zu unterbrechen, möge schon hier bemerkt werden, dass die Function:

$$\varphi'[\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p](2u_1 + \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \varrho_{\mu'} a_{1\mu'} \dots 2u_p + \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \varrho_{\mu'} a_{p\mu'}),$$

wobei die ϱ ganze Zahlen bezeichnen, bei Aenderung von $2u_\nu$ um πi denselben Factor erlangt, wie die Function $\varphi'[\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p](2u_1 | \dots | 2u_p)$. Man hat nämlich:

$$\varphi'[\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p](2u_1 + \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \varrho_{\mu'} a_{1\mu'} | \dots | 2u_\nu + \pi i + \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \varrho_{\mu'} a_{\nu\mu'} | \dots 2u_p + \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \varrho_{\mu'} a_{p\mu'})$$

$$= \varphi'[\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p](2u_1 + \sum_{\mu'=1}^{\mu=p} \varrho_{\mu'} a_{1\mu'} | \dots 2u_\nu + \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \varrho_{\mu'} a_{\nu\mu'} \dots 2u_p + \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \varrho_{\mu'} a_{p\mu'})$$

$$\times e^{\varepsilon_\nu \pi i - \frac{a_{\nu\nu}}{\Delta}\pi^2 + 4\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\frac{a_{\mu\nu}u_\mu}{\Delta} + 2\pi i \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}\varrho_{\mu'}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\frac{a_{\mu\nu}a_{\mu\mu'}}{\Delta}},$$

und da:

$$e^{2\pi i \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu=p}\varrho_{\mu'}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\frac{a_{\mu\nu}a_{\mu\mu'}}{\Delta}} = e^{2\pi i \varrho_\nu} = 1$$

ist, so ergibt sich der hier auftretende Exponentialfactor gleich dem von der Function $\varphi'[\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p](2u_1 | \dots 2u_p)$ erlangten.

Die Function $\varphi'[\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p](2u_1 | \dots | 2u_p)$ kann man nun unter Berücksichtigung ihrer Periodicitätseigenschaften durch ein Verfahren, welches dem früher auf die Function f angewandten ganz analog ist, zunächst mit Bezug auf das Periodensystem $2a_{1\nu} | \dots | 2a_{p\nu}$ als Summe zweier Functionen mit denselben Variablen $(2u)$ darstellen, von denen die erste den Factor $+1$, die zweite den Factor -1 annimmt, wenn man das System $2u_1 | \dots | 2u_p$ um das System $a_{1\nu} | \dots | a_{p\nu}$ ändert. Diese Darstellung wird geliefert durch die identische Gleichung:

$$\varphi'[\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p](2u_1|\ldots|2u_p)=\frac{\varphi'[\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p](2u_1|\ldots|2u_p)+\varphi'[\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p](2u_1+a_{1\nu}|\ldots|2u_p+a_{p\nu})}{2}$$
$$+\frac{\varphi'[\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p](2u_1|\ldots|2u_p)-\varphi'[\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p](2u_1+a_{1\nu}|\ldots|2u_p+a_{p\nu})}{2}.$$

Einen jeden der beiden auf diese Weise entstandenen Summanden kann man weiter, indem man ein neues Periodensystem $a_{1\nu'}|\ldots|a_{p\nu'}$ wählt, ebenso in zwei Functionen zerlegen, von denen die erste bei Aenderung von $2u_1|\ldots|2u_p$ um $a_{1\nu'}|\ldots|a_{p\nu'}$ den Factor $+1$, die zweite den Factor -1 erlangt. Fährt man mit dieser Zerlegung fort, bis sämmtliche p Periodensysteme der Function φ' erschöpft sind, so erhält man schliesslich die Function φ' dargestellt als eine Summe von 2^p anderen Functionen χ', die so beschaffen sind, dass sie bei Aenderung von $2u_1|\ldots|2u_p$ um $a_{1\nu}|\ldots|a_{p\nu}$, welchen Werth auch ν besitzen mag, jedesmal zur Hälfte den Factor $+1$, zur andern Hälfte den Factor -1 annehmen, und es sind, wie man leicht einsieht, diese Functionen χ' unabhängig von der für die successive Zerlegung eingehaltenen Reihenfolge der Periodensysteme $a_{1\nu}|\ldots|a_{p\nu}$. Eine dieser Functionen χ' ist also in Unterscheidung von den übrigen bestimmt durch die Bedingung, dass sie bei Aenderung von $2u_1|\ldots|2u_p$ um $a_{11}|\ldots|a_{p1}$ den Factor $(-1)^{\varepsilon'_1}$, bei Aenderung um $a_{12}|\ldots|a_{p2}$ den Factor $(-1)^{\varepsilon'_2}$, endlich bei Aenderung um $a_{1p}|\ldots|a_{pp}$ den Factor $(-1)^{\varepsilon'_p}$ erlangt, wobei allgemein ε'_ν entweder den Werth 0 oder den Werth 1 hat, während sie, der oben gemachten Bemerkung entsprechend, zugleich mit allen übrigen Functionen χ' bei Aenderung von $2u_\nu$ um πi denselben Factor erlangt wie die ursprüngliche Function φ'. In Folge dessen kann eine solche Function χ' passend durch $\chi'\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\ldots|2u_p)$ bezeichnet werden, wobei die Reihe $\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p$ die Function φ markirt, aus der sie entstanden ist, die Reihe $\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p$ die Factoren bestimmt, durch die sie sich von den übrigen aus derselben Quelle stammenden Functionen χ' unterscheidet. Unter Einführung dieser Bezeichnung hat man dann:

$$(4)\qquad \varphi'[\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p](2u_1|\ldots|2u_p)=\sum_{\varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_p}^{0,1}\chi'\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\ldots|2u_p),$$

wobei die Summation über alle 2^p Formen χ' auszudehnen ist, die entstehen, indem man in $\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}$ für die $\varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_p$ auf alle möglichen Weisen die Zahlen 0 und 1 einsetzt.

Die Function $\chi'\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\ldots|2u_p)$ genügt nach dem Obigen den beiden Gleichungen:

$$(4')\quad \begin{aligned}&1)\ \chi'\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\ldots|2u_\nu+\pi i|\ldots|2u_p)=\chi'\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\ldots|2u_\nu|\ldots|2u_p)e^{\varepsilon_\nu\pi i-\frac{a_{\nu\nu}}{\Delta}\pi^2+4\pi i\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\frac{a_{\mu\nu}u_\mu}{\Delta}},\\ &\qquad\qquad (\nu=1,2,\ldots,p)\\ &2)\ \chi'\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1+a_{1\nu}|\ldots|2u_p+a_{p\nu})=\chi'\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\ldots|2u_p)e^{\varepsilon'_\nu\pi i}.\end{aligned}$$

Setzt man daher:

$$(5)\qquad \chi\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\dots|2u_p) = \chi'\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\dots|2u_p)e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}\frac{\alpha_{\mu\mu'}}{\Delta}(2u_\mu)(2u_{\mu'})}$$

und berücksichtigt, dass der Gleichung (3) zufolge:

$$\varphi[\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p](2u_1|\dots|2u_p) = \varphi'[\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p](2u_1|\dots|2u_p)e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}\frac{\alpha_{\mu\mu'}}{\Delta}(2u_\mu)(2u_{\mu'})}$$

ist, so ergibt sich aus der Gleichung (4), indem man linke und rechte Seite derselben mit der in den beiden letzten Gleichungen rechts vorkommenden Exponentialgrösse multiplicirt:

$$(6)\qquad \varphi[\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p](2u_1|\dots|2u_p) = \sum_{\varepsilon'_1,\dots,\varepsilon'_p}^{0,1} \chi\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\dots|2u_p),$$

und daher schliesslich, wenn man den gewonnenen Ausdruck für $\varphi[\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p](2u_1|\dots 2u_p)$ in die Gleichung (2) einführt:

$$(7)\qquad f(2u_1|\dots|2u_p) = \sum_{\substack{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1,\dots,\varepsilon'_p}}^{0,1} \chi\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\dots|2u_p),$$

wobei die Summation über alle 2^{2p} Formen χ auszudehnen ist, die entstehen, indem man für die $2p$ Grössen ε, ε' auf alle möglichen Weisen die Zahlen 0 und 1 einführt.

Aus den Gleichungen (4'), (5) ergibt sich unmittelbar, dass die Function $\chi\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\dots|2u_p)$, die im übrigen ihrer Entstehung nach eine einwerthige und für endliche Werthe von u auch stetige Function der complexen Variablen $2u_1 \dots 2u_p$ ist, den Gleichungen:

$$1)\ \chi\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\dots|2u_\nu+\pi i|\dots|2u_p) = \chi\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\dots|2u_\nu|\dots|2u_p)e^{\varepsilon_\nu\pi i},$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, p)$$

$$2)\ \chi\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1+a_{1\nu}|\dots|2u_p+a_{p\nu}) = \chi\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\dots|2u_p)e^{-4u_\nu-a_{\nu\nu}+\varepsilon'_\nu\pi i}$$

genügt; denselben Gleichungen genügt aber auch die Function $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\dots|2u_p)$, und es können daher, nach dem im Art. 1. Bemerkten, die beiden Functionen sich nur um einen von den sämmtlichen u freien Factor unterscheiden, d. h. man kann setzen:

$$\chi\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\dots|2u_p) = K\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\dots|2u_p),$$

wobei $K\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}$ eine von den Variablen u unabhängige Grösse bezeichnet, und erhält dann, wenn man diesen Ausdruck in die Gleichung (7) einführt und zugleich f aus (1) durch das ϑ-Product ersetzt, als vorläufiges Endresultat die Gleichung:

$$(8)\quad \vartheta((u+v+w+t))\,\vartheta((u+v-w-t))\,\vartheta((u-v+w-t))\,((u-v-w+t))$$
$$=\sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_p}}^{0,1} K\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((2u)),$$

in welcher die $K\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}$, die zwar nicht von den Variablen u, wohl aber von den Variablen v, w, t abhängen, als Functionen der letzteren noch zu bestimmen sind.

3.

Die auf der rechten Seite der Gleichung (8) vorkommenden 2^{2p} Functionen $\vartheta[\varepsilon]((2u))$ sind linearunabhängig, d. h. es besteht zwischen ihnen keine homogene lineare Relation mit in Bezug auf die u constanten Coefficienten.

Das Gegentheil angenommen, sei:

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_p}}^{0,1} L\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((2u))=0$$

eine solche, für alle Werthe von u bestehende lineare Relation, bei der die $L\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}$ von den u unabhängige Grössen bezeichnen, die theilweise auch den Werth Null haben können. Lässt man dann das System $(2u)$ in das System $\left(2u+\left|\begin{smallmatrix}2\lambda\\2\lambda'\end{smallmatrix}\right|\right)$, unter λ, λ' ganze Zahlen verstanden, übergehen, so entsteht aus der obigen Gleichung die neue:

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_p}}^{0,1} L\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}\left(\left(2u+\left|\begin{matrix}2\lambda\\2\lambda'\end{matrix}\right|\right)\right)=0.$$

Berücksichtigt man jetzt, dass nach Formel (D) des Art. 1., wenn man darin (v) durch $(2u)$ ersetzt:

$$\vartheta[\varepsilon]\left(\left(2u+\left|\begin{matrix}2\lambda\\2\lambda'\end{matrix}\right|\right)\right)=\vartheta[\varepsilon]((2u))\,e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}a_{\mu\mu'}\lambda_\mu\lambda_{\mu'}-4\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}\lambda_\mu u_\mu+\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\lambda'_\mu+\varepsilon'_\mu\lambda_\mu)\pi i}$$

ist, so erhält man durch Combination dieser Gleichung mit der vorhergehenden, unter Fortlassung des allen Gliedern gemeinsamen Factors, die allgemeinere Relation:

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_p}}^{0,1}(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\lambda'_\mu+\varepsilon'_\mu\lambda_\mu)}\,L\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((2u))=0.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich aber, indem man für die $2p$ Grössen $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$; $\lambda'_1,\ldots,\lambda'_p$ auf alle möglichen Weisen die Zahlen 0 und 1 einführt, im Ganzen 2^{2p} ver-

schiedene Gleichungen, deren Zusammenbestehen das Verschwinden derjenigen Determinante nach sich ziehen würde, die als allgemeines Glied die Exponentialgrösse

$$(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu \lambda'_\mu + \varepsilon'_\mu \lambda_\mu)}$$

besitzt, und von der eine Horizontalreihe erhalten wird, indem man im allgemeinen Gliede bei festgehaltenen λ, λ' an Stelle des Systems der $2p$ Grössen ε, ε' nacheinander sämmtliche 2^{2p} Variationen der Elemente 0, 1 zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung in vorherbestimmter Reihenfolge treten lässt, eine Verticalreihe dagegen, indem man bei festgehaltenen ε, ε' an Stelle des Systems der $2p$ Grössen λ, λ' dieselben Variationen treten lässt. Nun hat aber die so gebildete Determinante Δ einen von Null verschiedenen Werth, da man durch Multiplication von Δ mit sich selbst $\Delta^2 = n^n$, wo $n = 2^{2p}$, erhält, und es kann folglich zwischen den 2^{2p} verschiedenen Functionen $\vartheta[\varepsilon]((2u))$ keine homogene lineare Relation mit von u freien Coefficienten, die nicht sämmtlich Null sind, existiren, oder, was dasselbe, die 2^{2p} verschiedenen Functionen $\vartheta[\varepsilon]((2u))$ sind linearunabhängig. Nebenbei bemerkt folgt hieraus auch, dass die Grössen $K\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \cdots \varepsilon'_p\end{bmatrix}$ eindeutig bestimmt sind.

Das auf der linken Seite der Gleichung (8) stehende ϑ-Product ist eine symmetrische Function von (u), (v), (w), (t) in dem Sinne, dass sein Werth nicht geändert wird, wenn man irgend zwei der vier Variablensysteme (u), (v), (w), (t) mit einander vertauscht. Es hat demnach als Function von (v), (w) oder (t) betrachtet genau dieselben Eigenschaften wie als Function von (u). Daraus folgt aber, dass das betreffende ϑ-Product, welches nach (8) eine homogene lineare Function der 2^{2p} linearunabhängigen Functionen $\vartheta[\varepsilon]((2u))$ ist, zugleich auch eine ebensolche Function der 2^{2p} entsprechenden Grössen $\vartheta[\varepsilon]((2v))$, der 2^{2p} Grössen $\vartheta[\varepsilon]((2w))$, endlich der 2^{2p} Grössen $\vartheta[\varepsilon]((2t))$ beziehlich ist; es kann dasselbe daher, unter Berücksichtigung, dass zwischen je 2^{2p} Functionen $\vartheta[\varepsilon]((2V))$, $(V) = (u), (v), (w), (t)$ beziehlich, keine lineare Relation besteht, auch (u), (v), (w), (t) vollständig unabhängige Variablen sind, immer und nur auf eine Weise in die Form gebracht werden:

$$(9) \quad \vartheta((u+v+w+t))\,\vartheta((u+v-w-t))\,\vartheta((u-v+w-t))\,\vartheta((u-v-w+t))$$
$$= \sum_{[\varepsilon],[\zeta],[\eta],[\vartheta]} C_{[\varepsilon],[\zeta],[\eta],[\vartheta]}\,\vartheta[\varepsilon]((2u))\,\vartheta[\zeta]((2v))\,\vartheta[\eta]((2w))\,\vartheta[\vartheta]((2t)),$$

wobei die Grössen C von allen Variablen (u), (v), (w), (t) vollständig freie, ihrem Werthe nach noch zu bestimmende Constanten bezeichnen, und die Summation über alle Terme zu erstrecken ist, die aus dem allgemeinen Gliede entstehen, indem man die vier Charakteristiken $[\varepsilon]$, $[\zeta]$, $[\eta]$, $[\vartheta]$ unabhängig von einander die Reihe der 2^{2p} Normalcharakteristiken durchlaufen lässt.

4.

Zur Bestimmung der 2^{8p} Constanten C lasse man in der Gleichung (9) die irgend einem Index ν entsprechenden beiden Variablen u_ν, v_ν um $\frac{\pi i}{2}$ zunehmen. Da-

durch wird die linke Seite der Gleichung nicht geändert, das allgemeine Glied der rechten Seite dagegen erlangt den Factor $(-1)^{\varepsilon_\nu + \zeta_\nu}$, der den Werth -1 oder $+1$ hat, je nachdem ε_ν, ζ_ν verschieden oder nicht verschieden sind. Addirt man die so entstandene Gleichung zu der ursprünglichen und dividirt das gewonnene Resultat durch 2, so erhält man eine neue Formel, die sich von (9) nur dadurch unterscheidet, dass auf der rechten Seite alle diejenigen Glieder fehlen, bei denen nicht $\zeta_\nu = \varepsilon_\nu$ ist. Da aber zwischen den in der Gleichung (9) rechts vorkommenden 2^{8p} ϑ-Producten keine lineare Relation besteht, so können in ihr nur Glieder ausfallen, wenn das zugehörige C den Werth Null besitzt; es ist daher $C_{[\varepsilon],[\zeta],[\eta],[\vartheta]}$ immer Null, wenn nicht $\zeta_\nu = \varepsilon_\nu$ ist. Da hierbei für ν jede Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ gesetzt werden darf, so folgt unmittelbar, dass alle Grössen C Null sind, bei denen nicht gleichzeitig $\zeta_1 = \varepsilon_1$, $\zeta_2 = \varepsilon_2$, $\ldots$, $\zeta_p = \varepsilon_p$ ist. Auf dieselbe Weise zeigt man, indem man gleichzeitig u_ν und w_ν um $\frac{\pi i}{2}$ ändert und ν die Zahlen $1, 2, \ldots, p$ durchlaufen lässt, dass auch alle Coefficienten C Null sind, bei denen nicht gleichzeitig $\eta_1 = \varepsilon_1$, $\eta_2 = \varepsilon_2$, $\ldots$, $\eta_p = \varepsilon_p$ ist, und endlich, indem man u_ν und t_ν gleichzeitig um $\frac{\pi i}{2}$ ändert, dass auch alle C Null sind, bei denen nicht gleichzeitig $\vartheta_1 = \varepsilon_1$, $\vartheta_2 = \varepsilon_2$, $\ldots$, $\vartheta_p = \varepsilon_p$ ist.

Aendert man weiter in der Gleichung (9) $u_1 | \ldots | u_p$ um $\frac{a_{1\nu}}{2} \ldots | \frac{a_{p\nu}}{2}$, $v_1 | \ldots | v_p$ ebenfalls um $\frac{a_{1\nu}}{2} | \ldots | \frac{a_{p\nu}}{2}$, unter ν irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots, p$ verstanden, so erlangt dadurch die linke Seite den Factor $e^{-4(u_\nu + v_\nu) - 2a_{\nu\nu}}$, das allgemeine Glied der rechten Seite dagegen den Factor $e^{-4(u_\nu + v_\nu) - 2a_{\nu\nu} + (\varepsilon'_\nu + \zeta'_\nu)\pi i}$. Dividirt man dann links und rechts durch $e^{-4(u_\nu + v_\nu) - 2a_{\nu\nu}}$, so erscheint die ursprüngliche linke Seite wieder, während das allgemeine Glied der rechten Seite den Factor $(-1)^{\varepsilon'_\nu + \zeta'_\nu}$ erlangt hat, der den Werth -1 oder $+1$ besitzt, je nachdem ε'_ν, ζ'_ν verschieden oder nicht verschieden sind. Addirt man die so entstandene Gleichung zu der ursprünglichen und dividirt das gewonnene Resultat durch 2, so erhält man eine neue Formel, welche sich von (9) nur dadurch unterscheidet, dass auf der rechten Seite alle diejenigen Glieder fehlen, bei denen nicht $\zeta'_\nu = \varepsilon'_\nu$ ist. Daraus folgt aber, unter Wiederholung der schon oben angewandten Schlussweise, dass alle Coefficienten $C_{[\varepsilon],[\zeta],[\eta],[\vartheta]}$ Null sind, bei denen nicht $\zeta'_\nu = \varepsilon'_\nu$ ist. Da hierbei für ν jede Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ gesetzt werden darf, so ergibt sich unmittelbar, dass alle Grössen C Null sind, bei denen nicht gleichzeitig $\zeta'_1 = \varepsilon'_1$, $\zeta'_2 = \varepsilon'_2$, $\zeta'_p = \varepsilon'_p$ ist, und weiter, indem man in dem obigen Raisonnement (w) und (t) nach einander an Stelle von (v) treten lässt, dass auch alle diejenigen Constanten C den Werth Null haben, bei denen nicht gleichzeitig $\eta'_1 = \varepsilon'_1$, $\eta'_2 = \varepsilon'_2$, $\ldots$, $\eta'_p = \varepsilon'_p$ und $\vartheta'_1 = \varepsilon'_1$, $\vartheta'_2 = \varepsilon'_2$, $\ldots$, $\vartheta'_p = \varepsilon'_p$ ist.

Verbindet man die beiden gewonnenen Resultate, so erkennt man, dass in der Gleichung (9) alle Coefficienten C den Werth Null haben, bei denen nicht $[\zeta] = [\varepsilon]$, $[\eta] = [\varepsilon]$, $[\vartheta] = [\varepsilon]$ ist, und es nimmt daher, wenn man in neuer Bezeichnung:

$$C_{[\varepsilon],[\varepsilon],[\varepsilon],[\varepsilon]} = C\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_p \end{bmatrix}$$

setzt, die Formel (9) die einfachere Gestalt an:

$$(10)\qquad \vartheta((u+v+w+t))\,\vartheta((u+v-w-t))\,\vartheta((u-v+w-t))\,\vartheta((u-v-w+t))$$
$$=\sum_{[\varepsilon]} C\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix} \vartheta[\varepsilon]((2u))\,\vartheta[\varepsilon]((2v))\,\vartheta[\varepsilon]((2w))\,\vartheta[\varepsilon]((2t)),$$

wobei die Summation über alle Terme zu erstrecken ist, die aus dem allgemeinen Gliede entstehen, indem man an Stelle von $[\varepsilon]$ der Reihe nach sämmtliche 2^{2p} Normalcharakteristiken treten lässt.

Um die noch übrigen 2^{2p} Constanten C zu bestimmen, bemerke man zunächst, dass, wie aus den Formeln (B_1), (B_2) des Art. 1. hervorgeht, das allgemeine Glied der rechten Seite der Gleichung (10) keine Aenderung erfährt, wenn man darin die irgend einem Index ν entsprechende Grösse ε_ν allenthalben durch $\varepsilon_\nu \pm 2\lambda_\nu$, oder die Grösse ε'_ν durch $\varepsilon'_\nu \pm 2\lambda'_\nu$ ersetzt, unter λ_ν, λ'_ν beliebige positive ganze Zahlen verstanden, vorausgesetzt nur, dass man gleichzeitig die in Folge dessen neu auftretenden Grössen C durch die Gleichungen:

$$C\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu \pm 2\lambda_\nu \ldots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_\nu \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix} = C\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu \ldots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_\nu \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix},\qquad C\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu \ldots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_\nu \pm 2\lambda'_\nu \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix} = C\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu \ldots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_\nu \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix}$$

bestimmt.

Aendert man nun jede der vier, irgend einem Index ν entsprechenden Grössen u_ν, v_ν, w_ν, t_ν um $\frac{\pi i}{4}$, so erfährt dadurch die linke Seite der Gleichung (10) keine Aenderung, auf der rechten Seite dagegen geht, weil nach Formel (A) des Art. 1.:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu \ldots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_\nu \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(2V_1 \ldots | 2V_\nu + \tfrac{\pi i}{2} \ldots | 2V_p) = \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu \ldots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_\nu + 1 \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(2V_1 | \ldots 2V_\nu | \ldots | 2V_p)$$

ist, wobei für (V) der Reihe nach (u), (v), (w), (t) zu setzen ist, das ϑ-Product des allgemeinen Gliedes in ein anderes über, bei dem $\varepsilon'_\nu + 1$ an Stelle von ε'_ν getreten ist, während die zugehörige Constante C sich nicht ändert. Berücksichtigt man noch, dass die Formel (10) richtig bleibt, wenn man im allgemeinen Gliede der rechts stehenden Summe ε'_ν allenthalben durch $\varepsilon'_\nu + 1$ ersetzt, da hierdurch (weil das allgemeine Glied, wie oben bemerkt, in Bezug auf ε'_ν periodisch ist mit der Periode 2) nur eine Umstellung der Summanden, also keine Aenderung des Werthes der Summe stattfindet, so erhält man für die linke Seite der Gleichung (10) den zweifachen Ausdruck:

$$\vartheta((u+v+w+t))\,\vartheta((u+v-w-t))\,\vartheta((u-v+w-t))\,\vartheta((u-v-w+t))$$
$$=\sum_{[\varepsilon]} C\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu \ldots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_\nu + 1 \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu \ldots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_\nu + 1 \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((2u)) \;\ldots\ldots\; \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu \ldots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_\nu + 1 \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((2t))$$
$$=\sum_{[\varepsilon]} C\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu \ldots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_\nu \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu \ldots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_\nu + 1 \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((2u)) \;\ldots\ldots\; \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu \ldots \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_\nu + 1 \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((2t)),$$

und es ergibt sich daraus, da die 2^{2p} ϑ-Producte linearunabhängig sind, auch unter ν eine beliebige Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ verstanden wurde, allgemein:

$$C\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu + 1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix} = C\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}. \qquad (\nu = 1, 2, \dots, p)$$

Lässt man weiter ein jedes der vier Systeme $u_1 | \dots | u_p$, $v_1 | \dots | v_p$, $w_1 | \dots | w_p$, $t_1 | \dots t_p$ um das System $\frac{a_{1\nu}}{4} | \dots | \frac{a_{p\nu}}{4}$ zunehmen, so erfahren dadurch die Argumente der zweiten, dritten und vierten auf der linken Seite der Gleichung (10) stehenden ϑ-Function keine Aenderung, während die Argumente der ersten in $u_1 + v_1 + w_1 + t_1 + a_{1\nu} | \dots | u_p + v_p + w_p + t_p + a_{p\nu}$ übergehen, wodurch die linke Seite den Factor $e^{-2(u_\nu + v_\nu + w_\nu + t_\nu) - a_{\nu\nu}}$ erlangt. Auf der rechten Seite dagegen geht, weil nach Formel (A) des Art. 1.:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}\left(2V_1 + \frac{a_{1\nu}}{2} \Big| \dots \Big| 2V_p + \frac{a_{p\nu}}{2}\right) = \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu + 1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}(2V_1 | \dots | 2V_p) e^{-2V_\nu - \frac{a_{\nu\nu}}{4} - \frac{\varepsilon'_\nu}{2}\pi i}$$

ist, wobei für (V) der Reihe nach (u), (v), (w), (t) zu setzen ist, das allgemeine Glied über in:

$$C\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu + 1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((2u)) \dots \dots \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu + 1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((2t)) e^{-2(u_\nu + v_\nu + w_\nu + t_\nu) - a_{\nu\nu}}.$$

Dividirt man linke und rechte Seite der neu entstandenen Gleichung durch $e^{-2(u_\nu + v_\nu + w_\nu + t_\nu) - a_{\nu\nu}}$, so erhält man eine neue Gleichung, welche sich von (10) nur dadurch unterscheidet, dass rechts das ϑ-Product des allgemeinen Gliedes in ein anderes übergegangen, bei dem $\varepsilon_\nu + 1$ an Stelle von ε_ν getreten ist, während die zugehörige Constante C sich nicht geändert hat. Berücksichtigt man noch, dass die Formel (10) richtig bleibt, wenn man im allgemeinen Gliede der rechtsstehenden Summe ε_ν allenthalben durch $\varepsilon_\nu + 1$ ersetzt, da hierdurch (weil das allgemeine Glied, wie oben bemerkt, in Bezug auf ε_ν periodisch ist mit der Periode 2) nur eine Umstellung der Summanden, also keine Aenderung des Werthes der Summe stattfindet, so erhält man für die linke Seite der Gleichung (10) den zweifachen Ausdruck:

$$\vartheta((u + v + w + t))\, \vartheta((u + v - w - t))\, \vartheta((u - v + w - t))\, \vartheta((u - v - w + t))$$

$$= \sum_{[\varepsilon]} C\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu + 1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu + 1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((2u)) \dots\dots \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu + 1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((2t))$$

$$= \sum_{[\varepsilon]} C\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu + 1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((2u)) \dots\dots \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu + 1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((2t)),$$

und es ergibt sich daraus, da die 2^{2p} ϑ-Producte linearunabhängig sind, auch unter ν eine beliebige Zahl aus der Reihe $1, 2, \dots, p$ verstanden wurde, allgemein:

$$C\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu + 1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix} = C\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}. \qquad (\nu = 1, 2, \dots, p)$$

Die beiden, auf diese Weise für die C gefundenen Gleichungen zeigen, dass

eine beliebige Constante $C\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}$ ihren Werth nicht ändert, wenn man darin für alle ε, ε', die den Werth 1 haben, den Werth 0 einführt. Man hat demnach allgemein:

$$C\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix} = C\begin{bmatrix}0 \dots 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \dots 0\end{bmatrix},$$

und es sind daher die sämmtlichen 2^{2p} Constanten C einander gleich. Bezeichnet man ihren gemeinsamen Werth mit A, so entsteht aus der Formel (10) die einfachere:

$$(11)\quad \vartheta(\!(u+v+w+t)\!)\vartheta(\!(u+v-w-t)\!)\vartheta(\!(u-v+w-t)\!)\vartheta(\!(u-v-w+t)\!)$$
$$= A\sum_{[\varepsilon]}\vartheta[\varepsilon](\!(2u)\!)\vartheta[\varepsilon](\!(2v)\!)\vartheta[\varepsilon](\!(2w)\!)\vartheta[\varepsilon](\!(2t)\!),$$

in der nur noch eine Grösse, A, bestimmt werden muss, die zwar in Bezug auf die Variablen (u), (v), (w), (t) constant ist, möglicherweise aber von den ϑ-Modulen $a_{\mu\mu'}$ abhängig sein könnte.

5.

Zum Zwecke der Bestimmung der Constante A soll zunächst aus der letzten Formel eine allgemeinere abgeleitet werden. Der kürzeren Schreibweise wegen führe man vermittelst der Gleichungen (S) des Art. 2. in die linke Seite der Gleichung (11) die Grössen $(2u')$, $(2v')$, $(2w')$, $(2t')$ ein, so dass sie die Gestalt annimmt:

$$(11')\quad \vartheta(\!(2u')\!)\vartheta(\!(2v')\!)\vartheta(\!(2w')\!)\vartheta(\!(2t')\!) = A\sum_{[\varepsilon]}\vartheta[\varepsilon](\!(2u)\!)\vartheta[\varepsilon](\!(2v)\!)\vartheta[\varepsilon](\!(2w)\!)\vartheta[\varepsilon](\!(2t)\!).$$

Lässt man dann in dieser Formel überall das System (u) in das System $\left(u+\left|\begin{matrix}\eta \\ \eta'\end{matrix}\right|\right)$ übergehen, unter η, η' beliebige ganze Zahlen verstanden, und berücksichtigt, dass dadurch auf der linken Seite der Gleichung (11′) die Systeme:

$$(2u'),\ (2v'),\ (2w'),\ (2t')\ \text{in}\ \left(2u'+\left|\begin{matrix}\eta \\ \eta'\end{matrix}\right|\right),\ \left(2v'+\left|\begin{matrix}\eta \\ \eta'\end{matrix}\right|\right),\ \left(2w'+\left|\begin{matrix}\eta \\ \eta'\end{matrix}\right|\right),\ \left(2t'+\left|\begin{matrix}\eta \\ \eta'\end{matrix}\right|\right)$$

beziehlich übergehen, während auf der rechten Seite nur das System $(2u)$ in $\left(2u+\left|\begin{matrix}2\eta \\ 2\eta'\end{matrix}\right|\right)$ sich verwandelt, die Systeme $(2v)$, $(2w)$, $(2t)$ dagegen, als von den u vollständig unabhängig, ungeändert bleiben, so entsteht aus (11′) die Gleichung:

$$\vartheta\left(\!\left(2u'+\left|\begin{matrix}\eta \\ \eta'\end{matrix}\right|\right)\!\right)\vartheta\left(\!\left(2v'+\left|\begin{matrix}\eta \\ \eta'\end{matrix}\right|\right)\!\right)\vartheta\left(\!\left(2w'+\left|\begin{matrix}\eta \\ \eta'\end{matrix}\right|\right)\!\right)\vartheta\left(\!\left(2t'+\left|\begin{matrix}\eta \\ \eta'\end{matrix}\right|\right)\!\right)$$
$$= A\sum_{[\varepsilon]}\vartheta[\varepsilon]\left(\!\left(2u+\left|\begin{matrix}2\eta \\ 2\eta'\end{matrix}\right|\right)\!\right)\vartheta[\varepsilon](\!(2v)\!)\vartheta[\varepsilon](\!(2w)\!)\vartheta[\varepsilon](\!(2t)\!),$$

aus der dann, indem man auf die linke Seite derselben die Formel (A), auf die rechte die Formel (D) des Art. 1. anwendet und dann die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialfactoren durch Division entfernt, die gewünschte allgemeinere Formel:

(11″)
$$\vartheta[\eta]((2u'))\vartheta[\eta]((2v'))\vartheta[\eta]((2w'))\vartheta[\eta]((2t'))$$
$$= A\sum_{[\varepsilon]}(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\eta'_\mu+\varepsilon'_\mu\eta_\mu)}\vartheta[\varepsilon]((2u))\vartheta[\varepsilon]((2v))\vartheta[\varepsilon]((2w))\vartheta[\varepsilon]((2t))$$
erhalten wird, die jetzt weiter verwandt werden soll.

Wie zu Anfang des Art. 2. erwähnt wurde, kann man in allen Gleichungen, in denen (u), (v), (w), (t) als unabhängige Variablen auftreten, unbeschadet der Richtigkeit, die Systeme (u), (v), (w), (t) mit den Systemen (u'), (v'), (w'), (t') beziehlich vertauschen. Ersetzt man in der Gleichung (11′) die Summationsbuchstaben ε, ε' durch η, η' und führt in der Formel (11″) die genannte Vertauschung aus, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$\vartheta((2u'))\vartheta((2v'))\vartheta((2w'))\vartheta((2t')) = A\sum_{[\eta]}\vartheta[\eta]((2u))\vartheta[\eta]((2v))\vartheta[\eta]((2w))\vartheta[\eta]((2t)),$$

$$\vartheta[\eta]((2u))\vartheta[\eta]((2v))\vartheta[\eta]((2w))\vartheta[\eta]((2t))$$
$$= A\sum_{[\varepsilon]}(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\eta'_\mu+\varepsilon'_\mu\eta_\mu)}\vartheta[\varepsilon]((2u'))\vartheta[\varepsilon]((2v'))\vartheta[\varepsilon]((2w'))\vartheta[\varepsilon]((2t')),$$

und aus ihnen, indem man das auf der rechten Seite der ersten Gleichung stehende ϑ-Product $\vartheta[\eta]((2u))\vartheta[\eta]((2v))\vartheta[\eta]((2w))\vartheta[\eta]((2t))$ durch den ihm gleichen, die rechte Seite der zweiten Gleichung bildenden Ausdruck ersetzt, schliesslich die Formel:

$$\vartheta((2u'))\vartheta((2v'))\vartheta((2w'))\vartheta((2t'))$$
$$= A^2\sum_{[\eta]}\sum_{[\varepsilon]}(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\eta'_\mu+\varepsilon'_\mu\eta_\mu)}\vartheta[\varepsilon]((2u'))\vartheta[\varepsilon]((2v'))\vartheta[\varepsilon]((2w'))\vartheta[\varepsilon]((2t')),$$

die sich, nach Vertauschung der Summationsordnung auf der rechten Seite, auch folgendermassen schreiben lässt:

$$\vartheta((2u'))\vartheta((2v'))\vartheta((2w'))\vartheta((2t'))$$
$$= A^2\sum_{[\varepsilon]}\vartheta[\varepsilon]((2u'))\vartheta[\varepsilon]((2v'))\vartheta[\varepsilon]((2w'))\vartheta[\varepsilon]((2t'))\left\{\sum_{[\eta]}(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\eta'_\mu+\varepsilon'_\mu\eta_\mu)}\right\}.$$

Man setze nun zur Abkürzung:

$$\varphi\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix} = \sum_{[\eta]}(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\eta'_\mu+\varepsilon'_\mu\eta_\mu)}$$

und berücksichtige, dass die Summation über alle Terme zu erstrecken ist, die aus dem allgemeinen Gliede entstehen, indem man jeden der $2p$ Summationsbuchstaben η, η' unabhängig von den anderen den Werth 0 und 1 annehmen lässt. Aendert man einen dieser Summationsbuchstaben, z. B. η_ν oder η'_ν um 1, ersetzt also im allgemeinen

Gliede der Summe η_ν durch $\eta_\nu + 1$, beziehlich η'_ν durch $\eta'_\nu + 1$, so wird dadurch nur die Anordnung der Summanden geändert, also der Werth der Summe selbst in keiner Weise alterirt; anderseits erlangt das allgemeine Glied der Summe bei Aenderung von η_ν um 1 den Factor $(-1)^{\varepsilon'_\nu}$, bei Aenderung von η'_ν um 1 den Factor $(-1)^{\varepsilon_\nu}$, der, da er von den Summationsbuchstaben η, η' unabhängig ist, von der ganzen Summe angenommen wird. Es bestehen daher die Gleichungen:

$$\varphi\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix} = (-1)^{\varepsilon_\nu}\varphi\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}, \quad \varphi\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix} = (-1)^{\varepsilon'_\nu}\varphi\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}, \quad (\nu = 1, 2, \dots, p)$$

aus denen folgt, dass der Ausdruck φ immer den Werth Null besitzt, wenn auch nur eine der $2p$ Grössen $\varepsilon, \varepsilon'$, von denen jede nur 0 oder 1 sein kann, den Werth 1 besitzt. Da ferner der mit φ bezeichnete Ausdruck unmittelbar den Werth 2^{2p} liefert, wenn alle $\varepsilon, \varepsilon'$ Null sind, so reducirt sich die rechte Seite der letzten die Grösse A^2 enthaltenden Gleichung auf das eine Glied: $A^2 . 2^{2p} \vartheta[0]((2u'))\vartheta[0]((2v'))\vartheta[0]((2w'))\vartheta[0]((2t'))$, und es ergibt sich durch Vergleichung mit der linken Seite sofort:

$$A^2 . 2^{2p} = 1, \quad A^2 = \frac{1}{2^{2p}},$$

ein Resultat, welches man auch unmittelbar aus der erwähnten Gleichung erhalten kann, wenn man nur berücksichtigt, dass die 2^{2p} in derselben vorkommenden ϑ-Producte linearunabhängig sind.

Durch die bisherige Untersuchung ist die Grösse A bis auf das Vorzeichen bestimmt. Dieses Vorzeichen, welches nach dem am Schlusse des Art. 4. Bemerkten, von den Variablen (u), (v), (w), (t) unabhängig ist, könnte von den ϑ-Modulen $a_{\mu\mu'}$ abhängen, in dem Sinne, dass, wenn

$$A = \frac{1}{2^p} f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{pp})$$

gesetzt wird, die Function f für gewisse Werthe der Grössen $a_{\mu\mu'}$ den Werth $+1$, für andere den Werth -1 besässe. Es soll jetzt bewiesen werden, dass die Function f auch von den Grössen $a_{\mu\mu'}$ unabhängig ist, also entweder allenthalben den Werth $+1$, oder allenthalben den Werth -1 besitzt.

Der einfacheren Ausdrucksweise wegen soll die stetige Mannigfaltigkeit, welche von allen bei convergenter ϑ-Reihe zulässigen Werthen der $a_{\mu\mu'}$ gebildet wird, als Raum $\mathfrak{R}[a]$, und entsprechend ein System bestimmter Werthe der Grössen $a_{\mu\mu'}$ als ein Punkt a in diesem Raume aufgefasst werden. Denkt man sich dann irgend einen Punkt a des Raumes $\mathfrak{R}[a]$ fixirt, so können, da eine ϑ-Function nie für alle Werthe der Argumente verschwinden kann, zu den dadurch bestimmten Werthen der $a_{\mu\mu'}$ die Werthe von (u'), (v'), (w'), (t') stets so gewählt werden, dass die linke Seite der Gleichung (11') und folglich auch die auf der rechten Seite hinter A stehende Summe einen von Null verschiedenen endlichen Werth erhält. Da aber eine jede ϑ-Function eine stetige Function ihrer Modulen $a_{\mu\mu'}$ ist, so kann man unter Festhaltung der für (u'), (v'), (w'), (t') gewählten Werthe zu dem Punkte a ein ihn im Inneren enthaltendes Gebiet $\mathfrak{G}[a]$,

dessen Begrenzungspunkte sämmtlich von $\grave{a}$ endlich entfernt sind, bestimmen, der Art, dass, wenn der Punkt a seine Lage in diesem Gebiete stetig ändert, die linke Seite der Formel (11′) und also auch die auf der rechten Seite hinter A stehende Summe, während sie sich mit der Lage von $\grave{a}$ zugleich stetig ändern, niemals den Werth Null erhalten. Für den fixirten Punkt $\grave{a}$ ist dann auch A eine stetige Function der Grössen $a_{\mu\mu'}$, da es mit Hülfe der Formel (11′) als Quotient zweier Functionen der $a_{\mu\mu'}$ dargestellt werden kann, von denen eine jede stetig ist für diesen Punkt und nach dem soeben Festgesetzten niemals in dem Gebiete $\mathfrak{G}[\grave{a}]$, also weder im Punkte $\grave{a}$ selbst noch in dessen Umgebung, den Werth Null annimmt. Da aber der Punkt $\grave{a}$ ein beliebig gewählter Punkt des Raumes $\mathfrak{R}[a]$ ist, so folgt weiter, dass A und also auch $f(a_{11}, \ldots, a_{pp})$ eine in dem ganzen Raume $\mathfrak{R}[a]$ stetige Function der Grössen $a_{\mu\mu'}$ ist, die dementsprechend entweder allenthalben in $\mathfrak{R}[a]$ den Werth $+ 1$, oder allenthalben den Werth $- 1$ besitzen muss, sobald sie für irgend einen Punkt dieses Raumes den Werth $+ 1$, oder den Werth $- 1$ besitzt.

Um den von den Werthen der Modulen $a_{\mu\mu'}$, wie eben bewiesen, unabhängigen Werth von A zu finden, setze man in der Formel (11′) $(u) = (v) = (w) = (t) = (0)$, ferner allgemein $a_{\mu\mu'} = 0$, wenn μ von μ' verschieden ist, und lasse die, in Folge der Convergenzbedingungen immer negativen, reellen Theile der noch übrigen Modulen a_{11}, $a_{22}, \ldots, a_{pp}$ unbegrenzt gegen $-\infty$ gehen. Unter dem Einflusse dieses Aenderungsprocesses convergirt dann irgend eine, einer geraden Charakteristik $[\varepsilon]$ entsprechende Grösse $\vartheta[\varepsilon]((0))$ gegen die Grenze 0, wenn nicht $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_p = 0$ ist, gegen die Grenze 1, wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_p = 0$ ist. Im ersten Falle convergirt nämlich jedes Glied der $\vartheta[\varepsilon]((0))$ darstellenden Reihe gegen 0 und folglich, da eine Potenzreihe vorliegt, auch der Reihenwerth selbst gegen 0. Im zweiten Falle hat das den Werthen $m_1 = m_2 = \cdots = m_p = 0$ entsprechende Glied der Reihe den Werth 1, während alle übrigen Glieder ebenfalls gegen 0 convergiren. Bei ungerader Charakteristik $[\varepsilon]$ besitzt dagegen, da dann $\vartheta[\varepsilon]((v))$ eine ungerade Function ist, $\vartheta[\varepsilon]((0))$ immer den Werth 0. Unter den 2^{2p} in der Formel (11′) vorkommenden Charakteristiken $[\varepsilon]$ gibt es aber 2^p, für welche $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_p = 0$ ist; es convergirt daher in Folge der beschriebenen Aenderungen der $a_{\mu\mu}$ die linke Seite der Gleichung (11′) gegen 1, die auf der rechten Seite hinter A stehende Summe gegen 2^p. Daraus folgt aber, dass A, als Quotient dieser gegen 1 und 2^p beziehlich convergirenden Grössen, einen positiven Werth besitzt, wenn die reellen Theile der $a_{\mu\mu}$ hinreichend weit in's Negative geschoben werden, und es hat daher mit Rücksicht auf das vorher Bemerkte A für jedes System der $a_{\mu\mu'}$ einen positiven Werth, oder, was dasselbe, es ist stets $f(a_{11}, \ldots, a_{pp}) = + 1$.

Führt man den für A gefundenen Werth in die Formel (11′) ein, so erhält man die

Riemann'sche Thetaformel:

$$(12)\qquad 2^p\,\vartheta((2u'))\,\vartheta((2v'))\,\vartheta((2w'))\,\vartheta((2t')) = \sum_{[\varepsilon]} \vartheta[\varepsilon]((2u))\,\vartheta[\varepsilon]((2v))\,\vartheta[\varepsilon]((2w))\,\vartheta[\varepsilon]((2t)).$$

Lässt man in dieser Formel:

$$(2u),\ (2v),\ (2w),\ (2t) \text{ in } \left(2u + \left|\begin{matrix} 2\eta \\ 2\eta' \end{matrix}\right|\right),\ \left(2v + \left|\begin{matrix} \varrho \\ \varrho' \end{matrix}\right|\right),\ \left(2w + \left|\begin{matrix} \sigma \\ \sigma' \end{matrix}\right|\right),\ \left(2t - \left|\begin{matrix} \varrho + \sigma \\ \varrho' + \sigma' \end{matrix}\right|\right)$$

beziehlich übergehen, unter $[\eta]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$ beliebige Charakteristiken verstanden, und berücksichtigt, dass dadurch:

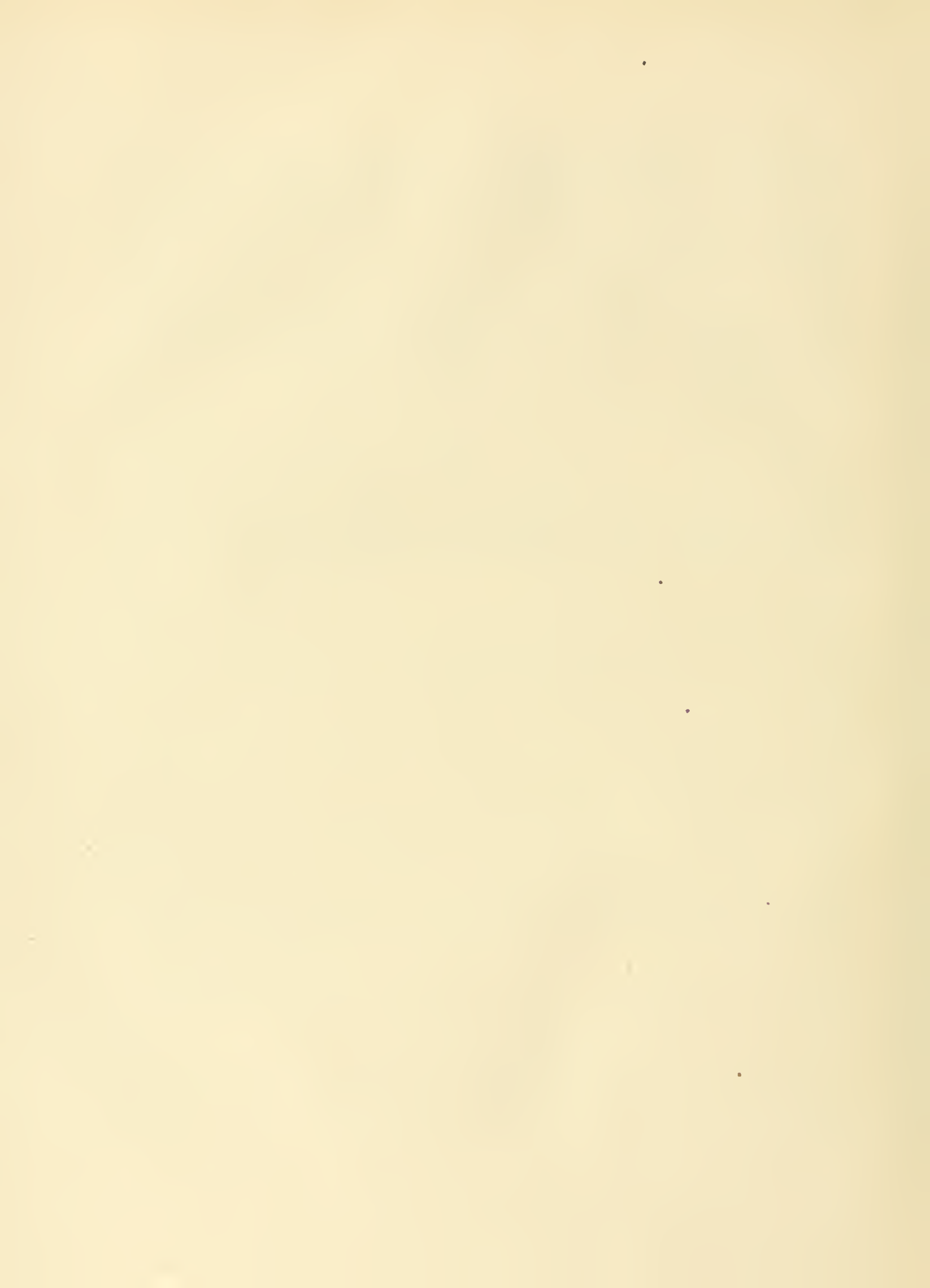
$$(2u'),\ (2v'),\ (2w'),\ (2t') \text{ in } \left(2u' + \left|\begin{matrix} \eta \\ \eta' \end{matrix}\right|\right),\ \left(2v' + \left|\begin{matrix} \eta + \varrho \\ \eta' + \varrho' \end{matrix}\right|\right),\ \left(2w' + \left|\begin{matrix} \eta + \sigma \\ \eta' + \sigma' \end{matrix}\right|\right),\ \left(2t' + \left|\begin{matrix} \eta - \varrho - \sigma \\ \eta' - \varrho' - \sigma' \end{matrix}\right|\right)$$

beziehlich übergehen, so erhält man unter Anwendung der Formeln (A) und (D) des Art. 1. die Formel:

$$(12') \quad 2^p\, \vartheta[\eta]((2u'))\, \vartheta[\eta + \varrho]((2v'))\, \vartheta[\eta + \sigma]((2w'))\, \vartheta[\eta - \varrho - \sigma]((2t'))$$

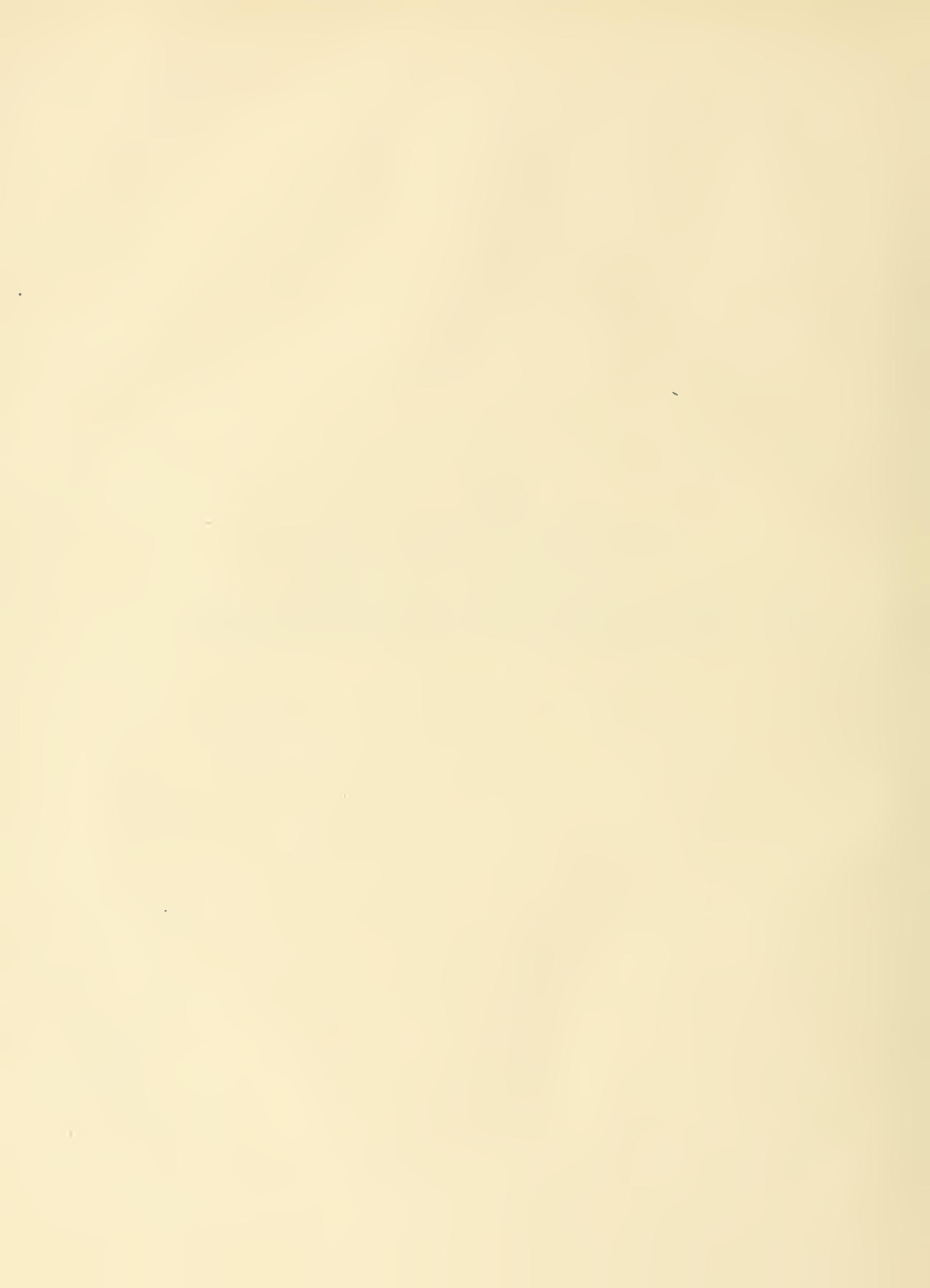
$$= \sum_{[\varepsilon]} (-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} (\varepsilon_\mu \eta'_\mu + \varepsilon'_\mu \eta_\mu)}\, \vartheta[\varepsilon]((2u))\, \vartheta[\varepsilon + \varrho]((2v))\, \vartheta[\varepsilon + \sigma]((2w))\, \vartheta[\varepsilon - \varrho - \sigma]((2t)),$$

welche die Formel (12) selbst und auch die früher aufgestellte Formel (11″) als specielle Fälle enthält und zugleich die allgemeinste derartige Formel ist.



II.

Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel.



1.

Die *Riemann*'sche p-fach unendliche ϑ-Reihe:

$$\vartheta(v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_p) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu v_\mu},$$

bei der die Grössen $a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$ nur den für die Convergenz der Reihe nothwendigen Bedingungen unterworfen sein sollen, stellt eine einwerthige und für endliche v auch immer stetige Function der complexen Veränderlichen $v_1 \mid v_2 \dots v_p$ dar, die den Gleichungen:

$$(1) \qquad \vartheta(v_1 \mid \dots \mid v_\nu + \pi i \mid \dots \mid v_p) = \vartheta(v_1 \mid \dots \mid v_\nu \mid \dots \mid v_p),$$

$$(2) \qquad \vartheta(v_1 + a_{1\nu} \mid v_2 + a_{2\nu} \mid \dots \mid v_p + a_{p\nu}) = \vartheta(v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_p) e^{-2v_\nu - a_{\nu\nu}} \quad (\nu = 1, 2, \dots, p)$$

genügt. Erfüllt umgekehrt eine einwerthige und für endliche v auch stetige Function der complexen Veränderlichen $v_1 \mid v_2 \dots \mid v_p$ die Gleichungen (1), (2), so kann sie sich von der Function $\vartheta(v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_p)$ nur um einen von den v freien Factor unterscheiden.

Die obige Function ist ein besonderer Fall der folgenden allgemeineren:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(v_1 \mid \dots \mid v_p)$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}(m_\mu + g_\mu)(m_{\mu'} + g_{\mu'}) + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} (m_\mu + g_\mu)(v_\mu + h_\mu \pi i)};$$

sie entsteht aus dieser, indem man für die willkürlichen Constanten g und h durchweg den Werth Null setzt, d. h. es ist:

$$\vartheta\begin{bmatrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix}(v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_p) = \vartheta(v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_p).$$

Die neue Function kann stets durch die ursprüngliche ausgedrückt werden mit Hülfe der Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(v_1 \mid \dots \mid v_p) = \vartheta(v_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{1\mu} + h_1 \pi i \mid \dots \mid v_p + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{p\mu} + h_p \pi i)$$

$$\times e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g_\mu g_{\mu'} + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu (v_\mu + h_\mu \pi i)}$$

und genügt ähnlich wie diese den Gleichungen:

$$(1') \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{bmatrix}(v_1 | \ldots | v_\nu + \pi i | \ldots | v_p) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{bmatrix}(v_1 | \ldots | v_\nu | \ldots v_p) e^{2 g_\nu \pi i}.$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$(2') \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{bmatrix}(v_1 + a_{1\nu} | \ldots | v_p + a_{p\nu}) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{bmatrix}(v_1 | \ldots | v_p) e^{-2 v_\nu - a_{\nu\nu} - 2 h_\nu \pi i}.$$

Erfüllt umgekehrt eine einwerthige und für endliche v auch stetige Function der complexen Veränderlichen $v_1 | v_2 | \ldots | v_p$ die Gleichungen (1′), (2′), so kann sie sich von der Function $\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{bmatrix}(v_1 | \ldots | v_p)$ nur um einen von den v freien Factor unterscheiden.

Das Symbol $\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{bmatrix}$ wird die Charakteristik der ϑ-Reihe genannt und soll, wenn dadurch kein Missverständniss zu befürchten, abgekürzt durch $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ bezeichnet werden. Ferner möge es erlaubt sein, wenn die Ausdrücke für die Argumente einer ϑ-Function sich nur durch untere Indices unterscheiden, unter dem Functionszeichen nur den allgemeinen Ausdruck für die Argumente mit Weglassung des Index, in doppelte Klammern eingeschlossen, zu schreiben, also $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(v)\!)$ für $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v_1 | v_2 | \ldots v_p)$, und entsprechend ein Grössensystem $v_1 | v_2 | \ldots | v_p$ einfacher durch (v) zu bezeichnen. Bezeichnet man dann endlich noch das System:

$$v_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu a_{1\mu} + h'_1 \pi i \,|\, \ldots \,|\, v_p + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu a_{p\mu} + h'_p \pi i,$$

wobei die g', h' beliebige Constanten bezeichnen, symbolisch mit $\left(v + \begin{vmatrix} g' \\ h' \end{vmatrix}\right)$, so ergeben sich aus den beiden, für die Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(v)\!)$ oben aufgestellten Ausdrücken die Relationen:

$$(A) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(\!\!\left(v + \begin{vmatrix} g' \\ h' \end{vmatrix}\right)\!\!\right) = \vartheta\begin{bmatrix} g + g' \\ h + h' \end{bmatrix}(\!(v)\!)\, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g'_\mu g'_{\mu'} - 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu (v_\mu + h_\mu \pi i + h'_\mu \pi i)},$$

$$(B_1) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_\nu + 1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots \; h_\nu \; \ldots h_p \end{bmatrix}(\!(v)\!) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_\nu \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_\nu \ldots h_p \end{bmatrix}(\!(v)\!),$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$(B_2) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots \; g_\nu \; \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_\nu + 1 \ldots h_p \end{bmatrix}(\!(v)\!) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_\nu \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_\nu \ldots h_p \end{bmatrix}(\!(v)\!)\, e^{2 g_\nu \pi i},$$

$$(C) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{bmatrix}(\!(-v)\!) = \vartheta\begin{bmatrix} -g_1 \ldots -g_p \\ -h_1 \ldots -h_p \end{bmatrix}(\!(v)\!),$$

die für beliebige g, h, g', h' gelten. Sind dagegen die Grössen g', h' ganze Zahlen, so geht aus der Formel (A) durch Anwendung der Relationen (B) die folgende einfachere Formel hervor:

$$(D) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(\!\!\left(v + \begin{vmatrix} g' \\ h' \end{vmatrix}\right)\!\!\right) = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(v)\!)\, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g'_\mu g'_{\mu'} - 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu v_\mu + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} (g_\mu h'_\mu - g'_\mu h_\mu) \pi i},$$

welch' letztere als specielle Fälle die schon vorher erwähnten Formeln:

$$(D_1)\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v_1 \mid \ldots \mid v_\nu + \pi i \ldots v_p) = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v_1 \mid \ldots v_\nu \ldots \mid v_p)\, e^{2 g_\nu \pi i},$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$(D_2)\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v_1 + a_{1\nu} \mid \ldots \mid v_p + a_{p\nu}) = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v_1 \mid \ldots \mid v_p)\, e^{-2 v_\nu - a_{\nu\nu} - 2 h_\nu \pi i}$$

umfasst.

2.

Die Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v))$ ist selbst wieder nur ein specieller Fall einer allgemeineren Function, deren Ausdruck erhalten wird, indem man in der für $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v))$ aufgestellten Reihe allgemein v_μ durch δv_μ, $a_{\mu\mu'}$ durch $\delta a_{\mu\mu'}$, h_μ durch δh_μ ersetzt, wobei δ eine ganze, und zwar, weil im andern Falle die entstehende Reihe divergiren würde, eine positive ganze Zahl bezeichnen soll. Die so entstehende Function soll mit $\vartheta_\delta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v))$ bezeichnet werden, sodass:

$$\vartheta_\delta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v)) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\delta \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}(m_\mu + g_\mu)(m_{\mu'} + g_{\mu'}) + 2\delta \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} (m_\mu + g_\mu)(v_\mu + h_\mu \pi i)}$$

ist. Man erkennt sofort, dass für $\delta = 1$ $\vartheta_\delta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v))$ in die Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v))$ übergeht. Aus der die Function $\vartheta_\delta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v))$ definirenden Reihe ergeben sich nun unter Ausführung einfacher Rechnungen unmittelbar die folgenden Relationen:

$$(A)\quad \vartheta_\delta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(\left(v + \begin{vmatrix} g' \\ h' \end{vmatrix}\right)\right) = \vartheta_\delta\begin{bmatrix} g + g' \\ h + h' \end{bmatrix}((v))\, e^{-\delta \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g'_\mu g'_{\mu'} - 2\delta \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu (v_\mu + h_\mu \pi i + h'_\mu \pi i)},$$

$$(B_1)\qquad \vartheta_\delta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_\nu + 1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots \ h_\nu \ \ldots h_p \end{bmatrix}((v)) = \vartheta_\delta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_\nu \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_\nu \ldots h_p \end{bmatrix}((v)),$$

$$(B_2)\qquad \vartheta_\delta\begin{bmatrix} g_1 \ldots \ g_\nu \ \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_\nu + \frac{1}{\delta} \ldots h_p \end{bmatrix}((v)) = \vartheta_\delta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_\nu \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_\nu \ldots h_p \end{bmatrix}((v))\, e^{2 g_\nu \pi i}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, p$$

$$(B_3)\qquad \vartheta_\delta\begin{bmatrix} g_1 \ldots \ g_\nu \ \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_\nu + 1 \ldots h_p \end{bmatrix}((v)) = \vartheta_\delta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_\nu \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_\nu \ldots h_p \end{bmatrix}((v))\, e^{2 \delta g_\nu \pi i},$$

$$(C)\qquad \vartheta_\delta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{bmatrix}((-v)) = \vartheta_\delta\begin{bmatrix} -g_1 \ldots -g_p \\ -h_1 \ldots -h_p \end{bmatrix}((v)),$$

die für beliebige g, h, g', h' gelten. Sind dagegen die Grössen g', h' ganze Zahlen, so geht aus der Formel (A) durch Anwendung der Relationen (B) die folgende einfachere Formel hervor:

$$(D)\quad \vartheta_\delta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]\left(\!\left(v+\begin{smallmatrix} g' \\ h' \end{smallmatrix}\right)\!\right)=\vartheta_\delta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((v))\, e^{-\delta\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}g'_\mu g'_{\mu'}-2\delta\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu v_\mu+2\delta\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(g_\mu h'_\mu-g'_\mu h_\mu)\pi i},$$

welch' letztere als specielle Fälle die Formeln:

$$(D_1)\qquad \vartheta_\delta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](v_1|\cdots|v_\nu+\pi i|\cdots|v_p)=\vartheta_\delta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](v_1|\cdots|v_\nu|\cdots|v_p)\,e^{2\delta g_\nu \pi i},$$
$$(\nu=1,2,\ldots,p)$$
$$(D_2)\qquad \vartheta_\delta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](v_1+a_{1\nu}|\cdots|v_p+a_{p\nu})=\vartheta_\delta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](v_1|\cdots|v_p)\,e^{-\delta(2v_\nu+a_{\nu\nu})-2\delta h_\nu \pi i}$$

umfasst. Man kann bemerken, dass die Formel (D) auch noch gilt, wenn nur die g' ganze Zahlen bezeichnen, die h' dagegen Brüche mit dem Nenner δ sind. Setzt man nun dem entsprechend allgemein g'_μ gleich Null, für h'_μ dagegen einen Bruch, dessen Nenner δ, dessen Zähler eine ganze Zahl k_μ ist, so erhält man die Formel:

$$(D')\quad \vartheta_\delta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]\left(v_1+\frac{k_1}{\delta}\pi i\,\Big|\,v_2+\frac{k_2}{\delta}\pi i\,\Big|\cdots\Big|\,v_p+\frac{k_p}{\delta}\pi i\right)=\vartheta_\delta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](v_1|v_2|\cdots|v_p)\,e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu k_\mu \pi i},$$

die übrigens auch leicht direct aus der die Function definirenden Reihe abgeleitet werden kann.

Die Gleichungen (D_1), (D_2) gehen in dem speciellen Falle $\delta=1$ in die Formeln $(1')$, $(2')$ des Art. 1. über und bestimmen dann, wie schon früher erwähnt, in Verbindung mit den Bedingungen der Einwerthigkeit und Stetigkeit die Function $\vartheta_1\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((v))=\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((v))$ bis auf einen von den v freien Factor. Es drängt sich daher die Frage auf, ob auch im allgemeinen Falle, d. h. für $\delta>1$, die Formeln (D_1), (D_2) in Verbindung mit den Bedingungen der Einwerthigkeit und Stetigkeit die entsprechende Function $\vartheta_\delta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((v))$ bis auf einen von den v freien Factor bestimmen, oder ob denselben mehrere, nicht nur durch constante Factoren unterschiedene Functionen der v genügen. Um in dieser Richtung volle Klarheit zu erhalten, stelle man sich die folgende Aufgabe:

Es soll die allgemeinste einwerthige und für endliche Werthe der Argumente auch immer stetige Function $F(v_1|v_2|\cdots|v_p)$ der complexen Veränderlichen $v_1|v_2|\cdots|v_p$ gefunden werden, die für alle Werthe der v den Bedingungen:

$$(1)\qquad F(v_1|\cdots|v_\nu+\pi i|\cdots|v_p)=F(v_1|\cdots|v_\nu|\cdots|v_p)\,e^{2\delta g_\nu \pi i},$$
$$(\nu=1,2,\ldots p)$$
$$(2)\qquad F(v_1+a_{1\nu}|\cdots|v_p+a_{p\nu})=F(v_1|\cdots|v_p)\,e^{-\delta(2v_\nu+a_{\nu\nu})-2\delta h_\nu \pi i}$$

genügt.

Versteht man unter $F(v_1|\cdots|v_p)$ eine den gestellten Bedingungen genügende Function und setzt dann:

$$G(v_1|\cdots|v_p)=F(v_1|\cdots|v_p)\,e^{-2\delta\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu v_\mu},$$

so ist $G((v))$ ebenfalls eine allenthalben einwerthige und für endliche v auch immer stetige Function der complexen Variablen (v), die den Gleichungen:

$$(1)\qquad G(v_1 \mid \cdots \mid v_\nu + \pi i \mid \cdots \mid v_p) = G(v_1 \mid \cdots \mid v_\nu \mid \cdots \mid v_p), \qquad {\scriptstyle \nu = 1, 2, \ldots, p}$$

$$(2)\qquad G(v_1 + a_{1\nu} \mid \cdots \mid v_p + a_{p\nu}) = G(v_1 \mid \cdots \mid v_p)\, e^{-\delta(2v_\nu + a_{\nu\nu}) - 2\delta \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{\mu\nu} - 2\delta h_\nu \pi i}$$

genügt, und die zunächst in Folge der Gleichungen (1) für alle endlichen Werthe der v darstellbar ist durch dieselbe nach den ganzen negativen und positiven Potenzen der Grössen $e^{2v_1}, e^{2v_2}, \cdots, e^{2v_p}$ fortschreitende Reihe von der Form:

$$G(v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_p) = \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty} \cdots \sum_{n_p=-\infty}^{n_p=+\infty} A_{n_1, n_2, \ldots, n_p}\, e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} n_\mu v_\mu},$$

wobei die A von den v unabhängige Constanten bedeuten. Führt man diese Reihe an Stelle von $G((v))$ in die Gleichung (2) ein, so verwandelt sich sowohl die linke, wie die rechte Seite derselben in eine nach den ganzen Potenzen von $e^{2v_1}, e^{2v_2}, \cdots, e^{2v_p}$ fortschreitende Reihe, und es ergibt sich, wenn man berücksichtigt, dass zwei solche Reihen nur dann für alle Werthe der v einander gleich sein können, wenn die Coefficienten gleich hoher Potenzen der genannten Grössen $e^{2v_1}, e^{2v_2}, \cdots, e^{2v_p}$ beiderseits dieselben sind, für die Constanten A zunächst die Beziehung:

$$A_{n_1, \ldots, n_\nu + \delta, \ldots, n_p} = A_{n_1, \ldots, n_\nu, \ldots, n_p}\, e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} (n_\mu + \delta g_\mu) a_{\mu\nu} + \delta a_{\nu\nu} + 2\delta h_\nu \pi i}$$

als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Function $G((v))$ der Gleichung (2) genügt.

Durch successive Vermehrung von n_ν um $\delta, 2\delta, \ldots, (m_\nu - 1)\delta$ erhält man aus der vorstehenden Formel $m_\nu - 1$ weitere, die mit der ursprünglichen in passender Weise verbunden, die Gleichung:

$$A_{n_1, \ldots, n_\nu + m_\nu\delta, \ldots, n_p} = A_{n_1, \ldots, n_\nu, \ldots, n_p}\, e^{2m_\nu \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} (n_\mu + \delta g_\mu) a_{\mu\nu} + m_\nu^2 \delta a_{\nu\nu} + 2 m_\nu \delta h_\nu \pi i}$$

ergeben, welch' letztere, da sie ihrer Entstehung nach für $\nu = 1, 2, \ldots, p$ gilt, p verschiedene Gleichungen repräsentirt. Von diesen ausgehend kann man ein System von Recursionsformeln aufstellen, aus dem sich als allgemeinste Beziehung zwischen den A die folgende ergibt:

$$A_{n_1 + m_1\delta,\, n_2 + m_2\delta, \ldots, n_p + m_p\delta}$$
$$= A_{n_1, n_2, \ldots, n_p}\, e^{2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\nu (n_\mu + \delta g_\mu) a_{\mu\nu} + \delta \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p} m_\nu m_{\nu'} a_{\nu\nu'} + 2\delta \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} m_\nu h_\nu \pi i}.$$

Dieselbe, zunächst nur für positive ganze Zahlen m abgeleitet, bleibt auch noch für negative ganze Zahlen m bestehen; man erkennt dies unmittelbar, wenn man in derselben allgemein an Stelle der, keiner Bedingung unterworfenen, ganzen Zahl n_ν die Zahl $n_\nu - m_\nu\delta$ setzt und die so entstehende Gleichung nach $A_{n_1 - m_1\delta, n_2 - m_2\delta, \ldots, n_p - m_p\delta}$ auflöst. Ersetzt man noch in der letzten Formel den Buchstaben n durch den Buch-

staben r, so erhält man, nach passender Umformung der Exponentialgrösse, schliesslich die Formel:

$$A_{m_1\delta+r_1,\ldots,m_p\delta+r_p} = A_{r_1,\ldots,r_p} e^{\delta\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left[m_\mu m_{\mu'} + m_\mu\left(g_{\mu'}+\frac{r_{\mu'}}{\delta}\right) + m_{\mu'}\left(g_\mu+\frac{r_\mu}{\delta}\right)\right] + 2\delta\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu h_\mu \pi i},$$

in welcher $m_1, \ldots, m_p$; $r_1, \ldots, r_p$ beliebige ganze Zahlen vertreten.

Man nehme nun die aus dem Früheren unmittelbar sich ergebende Gleichung:

$$F((v)) = G((v))\, e^{2\delta\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu v_\mu} = \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty}\cdots\sum_{n_p=-\infty}^{n_p=+\infty} A_{n_1,n_2,\ldots,n_p}\, e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(n_\mu+\delta g_\mu)v_\mu}$$

und denke sich darin die ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_p$ in die Form gebracht:

$$n_1 = m_1\delta + r_1, \quad n_2 = m_2\delta + r_2, \ldots, \quad n_p = m_p\delta + r_p,$$

wobei $r_1, r_2, \ldots, r_p$ die kleinsten positiven Reste von $n_1, n_2, \ldots, n_p$ in Bezug auf den Modul δ bezeichnen sollen, die m also ganze Zahlen sind. Es wird dann allgemein n_ν alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, und zwar jeden nur einmal, annehmen, wenn man für r_ν der Reihe nach die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, \delta-1$ setzt und dabei jedesmal m_ν die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt. Auf diese Weise erhält man zunächst:

$$F((v)) = \sum_{r_1=0}^{r_1=\delta-1}\cdots\sum_{r_p=0}^{r_p=\delta-1}\ \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty}\cdots\sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} A_{m_1\delta+r_1,\ldots,m_p\delta+r_p}\, e^{2\delta\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(m_\mu+g_\mu+\frac{r_\mu}{\delta}\right)v_\mu}.$$

Führt man hier auf der rechten Seite an Stelle von $A_{m_1\delta+r_1,\ldots,m_p\delta+r_p}$ den vorher aufgestellten, die Grösse $A_{r_1,\ldots,r_p}$ enthaltenden Ausdruck ein, setzt zur Abkürzung:

$$C_{r_1,\ldots,r_p} = A_{r_1,\ldots,r_p}\, e^{-\delta\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(g_\mu+\frac{r_\mu}{\delta}\right)\left(g_{\mu'}+\frac{r_{\mu'}}{\delta}\right) - 2\delta\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(g_\mu+\frac{r_\mu}{\delta}\right)h_\mu\pi i}$$

und berücksichtigt, dass $C_{r_1,\ldots,r_p}$ von den Summationsbuchstaben m vollständig unabhängig ist und demnach auch vor die betreffenden Summenzeichen gestellt werden darf, so folgt weiter:

$$F((v)) = \sum_{r_1=0}^{r_1=\delta-1}\cdots\sum_{r_p=0}^{r_p=\delta-1} C_{r_1,\ldots,r_p}\sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty}\cdots\sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\Phi},$$

$$\Phi = \delta\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(m_\mu+g_\mu+\frac{r_\mu}{\delta}\right)\left(m_{\mu'}+g_{\mu'}+\frac{r_{\mu'}}{\delta}\right) + 2\delta\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\left(m_\mu+g_\mu+\frac{r_\mu}{\delta}\right)\left(v_\mu+h_\mu\pi i\right),$$

und schliesslich, indem man die zweite p-fache Summe durch eine ϑ_δ-Function ersetzt:

$$F((v)) = \sum_{r_1=0}^{r_1=\delta-1}\cdots\sum_{r_p=0}^{r_p=\delta-1} C_{r_1,r_2,\ldots,r_p}\,\vartheta_\delta\begin{bmatrix} g_1+\frac{r_1}{\delta}, & g_2+\frac{r_2}{\delta}, & \ldots, & g_p+\frac{r_p}{\delta} \\ h_1 & h_2 & \ldots, & h_p\end{bmatrix}((v)),$$

wobei die C, δ^p an der Zahl, Constanten bezeichnen.

Eine jede der δ^p auf der rechten Seite der letzten Gleichung vorkommenden Functionen ϑ_δ ist, den Gleichungen (D_1), (D_2) dieses Artikels zufolge, eine niemals versagende particuläre Lösung des für die Function $F(\!(v)\!)$ aufgestellten Systems von Differenzengleichungen (1), (2), und es wird daher der für die Function $F(\!(v)\!)$ gefundene Ausdruck die gewünschte allgemeinste Lösung darstellen, wenn man unter den C willkürliche Constanten versteht. Berücksichtigt man noch, dass zwischen den erwähnten δ^p Functionen ϑ_δ, wie ein Blick auf die sie darstellenden Potenzreihen unmittelbar zeigt, keine homogene lineare Relation mit in Bezug auf die Grössen v constanten Coefficienten bestehen kann, diese Functionen also linearunabhängig sind, so folgt weiter, dass die Anzahl, δ^p, der in dem allgemeinsten Ausdrucke für $F(\!(v)\!)$ vorkommenden willkürlichen Constanten sich niemals durch irgend eine Umformung des Ausdrucks auf eine geringere reduciren lässt.

Aus den gefundenen Resultaten ergibt sich nun leicht der folgende bekannte*) Satz:

„*Bezeichnet* $F_\delta(\!(v)\!)$ *irgend eine einwerthige und für endliche* v *auch stetige Function der complexen Veränderlichen* $v_1 | \ldots | v_p$, *die für alle Werthe der* v *den Gleichungen:*

$$(1) \qquad F_\delta(v_1 | \ldots | v_\nu + \pi i | \ldots | v_p) = F_\delta(v_1 | \ldots | v_\nu | \ldots | v_p)\, e^{2\delta g_\nu \pi i},$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$(2) \qquad F_\delta(v_1 + a_{1\nu} | \ldots | v_p + a_{p\nu}) = F_\delta(v_1 | \ldots | v_p)\, e^{-\delta(2v_\nu + a_{\nu\nu}) - 2\delta h_\nu \pi i}$$

genügt, wobei δ *eine positive ganze Zahl,* g, h *beliebige Constanten bedeuten. bezeichnen ferner* $F_\delta^{(1)}(\!(v)\!)$, $F_\delta^{(2)}(\!(v)\!)$, $\ldots$, $F_\delta^{(\delta^p)}(\!(v)\!)$ δ^p *andere, ebenfalls einwerthige und für endliche* v *auch stetige Functionen der complexen Veränderlichen* $v_1 | \ldots | v_p$, *die denselben Bedingungen* (1) *und* (2) *genügen und zudem linearunabhängig sind, so lässt sich aus diesen die ursprüngliche Function* $F_\delta(\!(v)\!)$ *immer und nur auf eine Weise zusammensetzen in der Form:*

$$F_\delta(\!(v)\!) = C^{(1)} F_\delta^{(1)}(\!(v)\!) + C^{(2)} F_\delta^{(2)}(\!(v)\!) + \ldots + C^{(\delta^p)} F_\delta^{(\delta^p)}(\!(v)\!),$$

wobei die C *von* $v_1 | \ldots | v_p$ *freie Grössen bezeichnen, die theilweise auch den Werth Null haben können.*"

3.

Ersetzt man in dem Ausdrucke für $\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(\!(v)\!)$, wo g', h' noch zu bestimmende Constanten bezeichnen, die Grössen $v_1 | \ldots | v_p$ durch die Grössen $rv_1 | \ldots | rv_p$, unter r eine positive ganze Zahl verstanden, so entsteht dadurch die einwerthige und für endliche v auch stetige Function:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g'_1 \ldots g'_p \\ h'_1 \ldots h'_p \end{bmatrix}(rv_1 | \ldots | rv_p)$$

*) Vergleiche: *Thomae*, Die allgemeine Transformation der ϑ-Functionen mit beliebig vielen Variabeln. Inaug.-Diss. Göttingen 1864, pag. 10, und: *Hermite*, Sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes. Comptes rendus, tome XL, pag. 366 und 429.

der complexen Variablen $v_1 | \dots | v_p$, die beim Uebergange:

von $v_1 | \dots | v_\nu | \dots | v_p$ in $v_1 | \dots | v_\nu + \pi i | \dots | v_p$ den Factor $e^{2rg'_\nu \pi i}$,

von $v_1 | \dots | v_p$ in $v_1 + a_{1\nu} | \dots | v_p + a_{p\nu}$ den Factor $e^{-r^2(2v_\nu + a_{\nu\nu}) - 2rh'_\nu \pi i}$

erlangt. Bestimmt man dann die Constanten g'_ν, h'_ν, für $\nu = 1, 2, \dots, p$, in allgemeinster Weise so, dass sie den Gleichungen:

$$e^{2rg'_\nu \pi i} = e^{2r^2 g_\nu \pi i}, \qquad e^{-2rh'_\nu \pi i} = e^{-2r^2 h_\nu \pi i},$$

unter g_ν, h_ν willkürliche Constanten verstanden, genügen, und führt die auf diese Weise sich ergebenden Werthe:

$$g'_\nu = rg_\nu + \frac{\alpha_\nu}{r}, \quad h'_\nu = rh_\nu + \frac{\beta_\nu}{r},$$

wobei α, β beliebige ganze Zahlen vertreten, an Stelle von g', h' in die Function $\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(rv_1 | \dots | rv_p)$ ein, so entsteht dadurch eine einwerthige und für endliche Werthe der v auch stetige Function:

$$f(v_1 | \dots | v_p) = \vartheta \begin{bmatrix} rg_1 + \frac{\alpha_1}{r}, \dots, rg_p + \frac{\alpha_p}{r} \\ rh_1 + \frac{\beta_1}{r}, \dots, rh_p + \frac{\beta_p}{r} \end{bmatrix} (rv_1 | \dots | rv_p),$$

die für alle Werthe der v den Gleichungen:

$$(1) \qquad f(v_1 | \dots | v_\nu + \pi i | \dots | v_p) = f(v_1 | \dots | v_\nu | \dots | v_p)\, e^{2r^2 g_\nu \pi i},$$

$$(2) \qquad f(v_1 + a_{1\nu} | \dots | v_p + a_{p\nu}) = f(v_1 | \dots | v_p)\, e^{-r^2(2v_\nu + a_{\nu\nu}) - 2r^2 h_\nu \pi i} \qquad (\nu = 1, 2, \dots, p)$$

genügt, und die demnach bei festgehaltenen Werthen der α und β als eine specielle Function $F_{r^2}((v))$ angesehen werden darf. Die ganzen Zahlen α, β kann man sich dabei immer auf ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul r reducirt denken, da eine Vermehrung der α, β um ganze Vielfache von r zu der obigen ϑ-Function in Gemässheit der Formeln (B_1), (B_2) des Art. 1. nur einen constanten Factor hinzufügen würde. Führt man nun mit Rücksicht auf das eben Bemerkte in dem obigen Ausdrucke für $f((v))$ an Stelle der $2p$ Grössen α, β auf alle möglichen Weisen die Zahlen $0, 1, 2, \dots, r-1$ ein, so erhält man im Ganzen r^{2p} verschiedene Functionen $F_{r^2}((v))$, und es würden dieselben nach dem im vorigen Artikel Gefundenen als ein vollständiges System von particulären Lösungen der Differenzengleichungen (1) und (2) des vorliegenden Artikels anzusehen sein, sobald nachgewiesen wäre, dass dieselben linearunabhängig sind, oder, was dasselbe, dass zwischen ihnen keine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten besteht.

Das Gegentheil angenommen, sei:

$$\sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_p}}^{0, 1, \dots, r-1} L^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}_{\beta_1, \dots, \beta_p}\, \vartheta \begin{bmatrix} rg_1 + \frac{\alpha_1}{r}, \dots, rg_p + \frac{\alpha_p}{r} \\ rh_1 + \frac{\beta_1}{r}, \dots, rh_p + \frac{\beta_p}{r} \end{bmatrix} ((rv)) = 0$$

eine solche, für alle Werthe der v bestehende lineare Relation, bei der die L von den v freie Constanten bezeichnen, die theilweise auch den Werth Null haben können. Setzt man dann hierin an Stelle des Systems:

$$v_1 \mid \ldots \mid v_p \text{ das System } v_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\varrho_\mu}{r} a_{1\mu} + \frac{\sigma_1}{r}\pi i \mid \ldots \mid v_p + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\varrho_\mu}{r} a_{p\mu} + \frac{\sigma_p}{r}\pi i,$$

unter ϱ, σ ganze Zahlen verstanden, oder, was dasselbe, lässt das System:

$$(rv) \text{ in das System } \left(rv + \begin{vmatrix}\varrho \\ \sigma\end{vmatrix}\right)$$

übergehen, so entsteht aus der obigen Gleichung die neue:

$$\sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_p}}^{0, 1, \ldots, r-1} L_{\beta_1, \ldots, \beta_p}^{\alpha_1, \ldots, \alpha_p} \; \vartheta\begin{bmatrix} rg_1 + \frac{\alpha_1}{r}, \ldots, rg_p + \frac{\alpha_p}{r} \\ rh_1 + \frac{\beta_1}{r}, \ldots, rh_p + \frac{\beta_p}{r} \end{bmatrix} \left(\!\!\left(rv + \begin{vmatrix}\varrho \\ \sigma\end{vmatrix} \right)\!\!\right) = 0.$$

Berücksichtigt man jetzt die aus Formel (D) des Art. 1. leicht herzustellende Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix} rg_1 + \frac{\alpha_1}{r}, \ldots, rg_p + \frac{\alpha_p}{r} \\ rh_1 + \frac{\beta_1}{r}, \ldots, rh_p + \frac{\beta_p}{r} \end{bmatrix} \left(\!\!\left(rv + \begin{vmatrix}\varrho \\ \sigma\end{vmatrix} \right)\!\!\right) = \vartheta\begin{bmatrix} rg_1 + \frac{\alpha_1}{r}, \ldots, rg_p + \frac{\alpha_p}{r} \\ rh_1 + \frac{\beta_1}{r}, \ldots, rh_p + \frac{\beta_p}{r} \end{bmatrix} ((rv))$$

$$\times\, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\varrho_\mu\varrho_{\mu'} - 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varrho_\mu r v_\mu + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left\{\left(rg_\mu + \frac{\alpha_\mu}{r}\right)\sigma_\mu - \left(rh_\mu + \frac{\beta_\mu}{r}\right)\varrho_\mu\right\}\pi i},$$

so erhält man durch Combination dieser Gleichung mit der vorhergehenden, unter Fortlassung des von den Summationsbuchstaben α, β freien, allen Gliedern gemeinsamen Factors:

$$e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\varrho_\mu\varrho_{\mu'} - 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varrho_\mu r v_\mu + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(rg_\mu\sigma_\mu - h_\mu\varrho_\mu)\pi i},$$

die allgemeinere Relation:

$$\sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_p}}^{0, 1, \ldots, r-1} L_{\beta_1, \ldots, \beta_p}^{\alpha_1, \ldots, \alpha_p} \; \vartheta\begin{bmatrix} rg_1 + \frac{\alpha_1}{r}, \ldots, rg_p + \frac{\alpha_p}{r} \\ rh_1 + \frac{\beta_1}{r}, \ldots, rh_p + \frac{\beta_p}{r} \end{bmatrix} ((rv))\, e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\alpha_\mu\sigma_\mu - \beta_\mu\varrho_\mu)} = 0.$$

Aus dieser letzten Gleichung ergeben sich aber, indem man für die $2p$ Grössen $\varrho_1, \ldots, \varrho_p$; $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ auf alle möglichen Weisen die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, r-1$ einführt, im Ganzen r^{2p} verschiedene Gleichungen, deren Zusammenbestehen das Verschwinden derjenigen Determinante nach sich ziehen würde, die als allgemeines Glied die Exponentialgrösse:

$$e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\alpha_\mu\sigma_\mu - \beta_\mu\varrho_\mu)}$$

besitzt, und von der eine Horizontalreihe erhalten wird, indem man im allgemeinen Gliede bei festgehaltenen ϱ, σ an Stelle des Systems der $2p$ Grössen α, β nach einander sämmtliche r^{2p} Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung in vorherbestimmter Reihenfolge treten lässt, eine Verticalreihe dagegen, indem man bei festgehaltenen α, β an Stelle des Systems der $2p$ Grössen ϱ, σ dieselben Variationen treten lässt. Nun hat aber die so gebildete Determinante $\varDelta$ einen von Null verschiedenen Werth, da man durch Multiplication von $\varDelta$ mit sich selbst $\varDelta^2 = N^N$, wo $N = r^{2p}$, erhält, und es kann folglich zwischen den r^{2p} hier betrachteten ϑ-Functionen keine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten, die nicht sämmtlich Null sind, existiren, oder, was dasselbe, diese r^{2p} ϑ-Functionen sind linear unabhängig.

Geht man jetzt auf den Satz am Ende des Art. 2. zurück und setzt darin an Stelle von δ die Zahl r^2, so kann man an Stelle der dann dort auftretenden r^{2p} Functionen $F_{r^2}^{(1)}((v))$, $F_{r^2}^{(2)}((v))$, $\ldots$, $F_{r^2}^{(r^{2p})}((v))$ mit Rücksicht auf das soeben Bewiesene die r^{2p} Functionen:

$$\vartheta\begin{bmatrix} rg_1+\frac{\alpha_1}{r}, \ldots rg_p+\frac{\alpha_p}{r} \\ rh_1+\frac{\beta_1}{r}, \ldots, rh_p+\frac{\beta_p}{r}\end{bmatrix}((rv)), \qquad \begin{pmatrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p = 0, 1, \ldots, r-1 \\ \beta_1, \ldots, \beta_p = 0, 1, \ldots, r-1\end{pmatrix}$$

setzen und erhält dann den folgenden Satz:

„*Bezeichnet $F_{r^2}((v))$ irgend eine einwerthige und für endliche v auch stetige Function der complexen Veränderlichen $v_1 | \ldots | v_p$, die für alle Werthe der v den Gleichungen:*

$$(1) \qquad F_{r^2}(v_1 | \ldots\ v_\nu + \pi i | \ldots | v_p) = F_{r^2}(v_1 | \ldots | v_\nu | \ldots | v_p)\, e^{2r^2 g_\nu \pi i},$$

$$(2) \qquad F_{r^2}(v_1 + a_{1\nu} | \ldots | v_p + a_{p\nu}) = F_{r^2}(v_1 | \ldots | v_p)\, e^{-r^2(2v_\nu + a_{\nu\nu}) - 2r^2 h_\nu \pi i}$$

genügt, wobei r eine positive ganze Zahl, g, h beliebige Constanten bedeuten, so lässt sich die so definirte Function $F_{r^2}((v))$ immer und nur auf eine Weise darstellen in der Form:

$$F_{r^2}((v)) = \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_p}}^{0, 1, \ldots, r-1} C_{\beta_1, \ldots, \beta_p}^{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}\, \vartheta\begin{bmatrix} rg_1+\frac{\alpha_1}{r}, \ldots rg_p+\frac{\alpha_p}{r} \\ rh_1+\frac{\beta_1}{r}, \ldots rh_p+\frac{\beta_p}{r}\end{bmatrix}(rv_1 | \ldots | rv_p),$$

wobei die C von $v_1 | \ldots | v_p$ freie Grössen bezeichnen, die theilweise auch den Werth Null haben können.“

4.

Es mögen $c_{11}, \ldots, c_{1n}; \ldots; c_{n1}, \ldots, c_{nn}$ n^2 ganze Zahlen bezeichnen, die für jedes μ und μ' von 1 bis n den Bedingungen:

$$c_{\mu 1} c_{1\mu'} + c_{\mu 2} c_{2\mu'} + \cdots + c_{\mu n} c_{n\mu'} = \begin{matrix} 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \\ r^2, \text{ wenn } \mu' = \mu, \end{matrix} \qquad c_{\mu\mu'} = c_{\mu'\mu},$$

genügen, wobei r eine vorweg beliebig angenommene positive ganze Zahl sein soll. Setzt man dann, unter $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ n unabhängige Veränderliche verstanden:

$$(S) \qquad \begin{aligned} \frac{c_{11}}{r} x^{(1)} + \frac{c_{12}}{r} x^{(2)} + \cdots + \frac{c_{1n}}{r} x^{(n)} &= x'^{(1)}, \\ \frac{c_{21}}{r} x^{(1)} + \frac{c_{22}}{r} x^{(2)} + \cdots + \frac{c_{2n}}{r} x^{(n)} &= x'^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{c_{n1}}{r} x^{(1)} + \frac{c_{n2}}{r} x^{(2)} + \cdots + \frac{c_{nn}}{r} x^{(n)} &= x'^{(n)}, \end{aligned}$$

so bilden diese n Gleichungen ein orthogonales involutorisches System.

Man nehme jetzt pn unabhängige Veränderliche u und theile dieselben in p Gruppen zu je n ein; die Variablen der ν^{ten} Gruppe sollen mit $u_\nu^{(1)}, u_\nu^{(2)}, \ldots, u_\nu^{(n)}$ bezeichnet werden. Ersetzt man dann in dem aufgestellten Gleichungensysteme (S) die Grössen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ durch die Variablen $u_\nu^{(1)}, u_\nu^{(2)}, \ldots, u_\nu^{(n)}$ der ν^{ten} Gruppe, bezeichnet entsprechend die Grössen, in die dann $x'^{(1)}, x'^{(2)}, \ldots, x'^{(n)}$ übergehen, mit $u'^{(1)}_\nu, u'^{(2)}_\nu, \ldots, u'^{(n)}_\nu$ und multiplicirt linke und rechte Seiten der entstehenden Gleichungen mit r, so erhält man, indem man für ν der Reihe nach die Zahlen $1, 2, \ldots, p$ setzt, p Systeme von je n Gleichungen, das ν^{te} von der Form:

$$\begin{aligned} c_{11} u_\nu^{(1)} + c_{12} u_\nu^{(2)} + \cdots + c_{1n} u_\nu^{(n)} &= r u'^{(1)}_\nu, \\ c_{21} u_\nu^{(1)} + c_{22} u_\nu^{(2)} + \cdots + c_{2n} u_\nu^{(n)} &= r u'^{(2)}_\nu, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1} u_\nu^{(1)} + c_{n2} u_\nu^{(2)} + \cdots + c_{nn} u_\nu^{(n)} &= r u'^{(n)}_\nu. \end{aligned}$$

Jedes dieser p Systeme hat dann, weil es ein involutorisches ist, die Eigenschaft, dass es, nach den n speciell in ihm vorkommenden Grössen u als Unbekannten aufgelöst, ein gleichgebautes System ergibt. So folgt aus dem eben aufgestellten ν^{ten} Systeme durch Auflösung das gleichgebaute System:

$$\begin{aligned} c_{11} u'^{(1)}_\nu + c_{12} u'^{(2)}_\nu + \cdots + c_{1n} u'^{(n)}_\nu &= r u_\nu^{(1)}, \\ c_{21} u'^{(1)}_\nu + c_{22} u'^{(2)}_\nu + \cdots + c_{2n} u'^{(n)}_\nu &= r u_\nu^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1} u'^{(1)}_\nu + c_{n2} u'^{(2)}_\nu + \cdots + c_{nn} u'^{(n)}_\nu &= r u_\nu^{(n)}, \end{aligned}$$

und man kann daher in allen auf Grund dieses Systems abgeleiteten Resultaten, die die u als unabhängige Veränderliche enthalten, die Variablen u mit den Variablen

u' beziehlich vertauschen. Ein jedes der p Systeme ist aber auch ein orthogonales, und es findet daher für jedes ν die Gleichung:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} u_\nu^{(\mu)^2} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} u_\nu^{\prime(\mu)^2}$$

statt.

Man substituire jetzt in $\vartheta(\!(v)\!)$ für $v_1 | v_2 | \ldots | v_p$ die Grössen $ru_1^{\prime(\mu)} | ru_2^{\prime(\mu)} | \ldots | ru_p^{\prime(\mu)}$ und bezeichne, in Uebereinstimmung mit der früher eingeführten Symbolik, die so entstehende Function mit $\vartheta(\!(ru'^{(\mu)})\!)$. Setzt man dann für μ der Reihe nach die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ und bildet das Product der n so entstehenden Functionen:

$$\vartheta(\!(ru'^{(1)})\!)\,, \quad \vartheta(\!(ru'^{(2)})\!)\,, \quad . \; . \; . \;, \quad \vartheta(\!(ru'^{(n)})\!)\,,$$

so kann man, wenn man berücksichtigt, dass, den aufgestellten Gleichungen zufolge, die Variablen u' homogene lineare Functionen der unabhängigen Veränderlichen u sind, das erwähnte ϑ-Product als Function der np Grössen $u_\nu^{(\mu)}$, $\mu = 1, 2, \ldots, n$; $\nu = 1, 2, \ldots, p$ betrachten und entsprechend mit $F(u_1^{(1)}, \ldots, u_p^{(1)} | u_1^{(2)}, \ldots, u_p^{(2)} | \ldots | u_1^{(n)}, \ldots, u_p^{(n)})$ bezeichnen, so dass also:

$$F(u_1^{(1)}, \ldots, u_p^{(1)} | u_1^{(2)}, \ldots, u_p^{(2)} | \ldots | u_1^{(n)}, \ldots, u_p^{(n)}) = \vartheta(\!(ru'^{(1)})\!)\,\vartheta(\!(ru'^{(2)})\!) \ldots \vartheta(\!(ru'^{(n)})\!)$$

ist. Es ist dann F eine einwerthige und für endliche u auch stetige Function der sämmtlichen Variablen $u_\nu^{(\mu)}$, von der weitere Eigenschaften jetzt ermittelt werden sollen.

Lässt man das in F vorkommende System:

$$u_1^{(\mu)}, \ldots, u_\nu^{(\mu)}, \ldots, u_p^{(\mu)} \text{ übergehen in } u_1^{(\mu)}, \ldots, u_\nu^{(\mu)} + \pi i, \ldots, u_p^{(\mu)},$$

so gehen dadurch, da nur die eine Variable $u_\nu^{(\mu)}$ um πi vermehrt wird, alle übrigen $np - 1$ Grössen u dagegen keine Aenderung erfahren, die n Grössen:

$$ru_\nu^{\prime(1)}, ru_\nu^{\prime(2)}, \ldots, ru_\nu^{\prime(n)} \text{ über in } ru_\nu^{\prime(1)} + c_{1\mu}\pi i, ru_\nu^{\prime(2)} + c_{2\mu}\pi i, \ldots, ru_\nu^{\prime(n)} + c_{n\mu}\pi i,$$

während die übrigen $(p-1)n$ Grössen ru' nicht geändert werden. Da nun ein jeder der Coefficienten c eine ganze Zahl ist, eine Function $\vartheta(v_1 | \ldots | v_p)$ aber ihren Werth nicht ändert, wenn v_ν in $v_\nu + g\pi i$ übergeht, unter g eine ganze Zahl verstanden, so bleibt beim Uebergange von $u_\nu^{(\mu)}$ in $u_\nu^{(\mu)} + \pi i$ der Werth einer jeden der n Functionen $\vartheta(\!(ru'^{(1)})\!), \ldots, \vartheta(\!(ru'^{(n)})\!)$, mithin auch der Werth ihres mit F bezeichneten Productes ungeändert.

Lässt man dagegen das in F vorkommende System:

$$u_1^{(\mu)}, u_2^{(\mu)}, \ldots, u_p^{(\mu)} \text{ übergehen in } u_1^{(\mu)} + a_{1\nu}, u_2^{(\mu)} + a_{2\nu}, \ldots, u_p^{(\mu)} + a_{p\nu},$$

so geht dadurch, da nur die p Variablen $u_1^{(\mu)}, u_2^{(\mu)}, \ldots, u_p^{(\mu)}$ um $a_{1\nu}, a_{2\nu}, \ldots, a_{p\nu}$ beziehlich vermehrt werden, die übrigen $(n-1)p$ Grössen u dagegen keine Aenderung erfahren:

$$ru_1'^{(1)}, ru_2'^{(1)}, \ldots, ru_p'^{(1)} \text{ über in } ru_1'^{(1)} + c_{1\mu}a_{1\nu}, ru_2'^{(1)} + c_{1\mu}a_{2\nu}, \ldots, ru_p'^{(1)} + c_{1\mu}a_{p\nu},$$

$$ru_1'^{(2)}, ru_2'^{(2)}, \ldots, ru_p'^{(2)} \text{ über in } ru_1'^{(2)} + c_{2\mu}a_{1\nu}, ru_2'^{(2)} + c_{2\mu}a_{2\nu}, \ldots, ru_p'^{(2)} + c_{2\mu}a_{p\nu},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$ru_1'^{(n)}, ru_2'^{(n)}, \ldots, ru_p'^{(n)} \text{ über in } ru_1'^{(n)} + c_{n\mu}a_{1\nu}, ru_2'^{(n)} + c_{n\mu}a_{2\nu}, \ldots, ru_p'^{(n)} + c_{n\mu}a_{p\nu},$$

und entsprechend:

$$\vartheta((ru'^{(1)})) \text{ über in } \vartheta(ru_1'^{(1)} + c_{1\mu}a_{1\nu}, \ldots, ru_p'^{(1)} + c_{1\mu}a_{p\nu}) = \vartheta((ru'^{(1)}))e^{-2c_{1\mu}ru_\nu'^{(1)} - c_{1\mu}^2 a_{\nu\nu}},$$

$$\vartheta((ru'^{(2)})) \text{ über in } \vartheta(ru_1'^{(2)} + c_{2\mu}a_{1\nu}, \ldots, ru_p'^{(2)} + c_{2\mu}a_{p\nu}) = \vartheta((ru'^{(2)}))e^{-2c_{2\mu}ru_\nu'^{(2)} - c_{2\mu}^2 a_{\nu\nu}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\vartheta((ru'^{(n)})) \text{ über in } \vartheta(ru_1'^{(n)} + c_{n\mu}a_{1\nu}, \ldots, ru_p'^{(n)} + c_{n\mu}a_{p\nu}) = \vartheta((ru'^{(n)}))e^{-2c_{n\mu}ru_\nu'^{(n)} - c_{n\mu}^2 a_{\nu\nu}},$$

also das Product:

$$\vartheta((ru'^{(1)}))\,\vartheta((ru'^{(2)}))\ldots\vartheta((ru'^{(n)})) \text{ über in } \vartheta((ru'^{(1)}))\,\vartheta((ru'^{(2)}))\ldots\vartheta((ru'^{(n)}))\,e^{-r^2(2u_\nu^{(\mu)} + a_{\nu\nu})},$$

da nach früher Bemerktem:

$$c_{1\mu}u_\nu'^{(1)} + c_{2\mu}u_\nu'^{(2)} + \ldots + c_{n\mu}u_\nu'^{(n)} = c_{\mu 1}u_\nu'^{(1)} + c_{\mu 2}u_\nu'^{(2)} + \ldots + c_{\mu n}u_\nu'^{(n)} = ru_\nu^{(\mu)},$$

und

$$c_{1\mu}^2 + c_{2\mu}^2 + \ldots + c_{n\mu}^2 = r^2$$

ist.

Aus der geführten Untersuchung folgt, dass die Function F den Differenzengleichungen:

$$(1)\quad F(\ldots\,|u_1^{(\mu)}, \ldots, u_\nu^{(\mu)} + \pi i, \ldots, u_p^{(\mu)}|\,\ldots) = F(\ldots\,|u_1^{(\mu)}, \ldots, u_\nu^{(\mu)}, \ldots, u_p^{(\mu)}|\,\ldots),$$

$$(2)\quad F(\ldots\,|u_1^{(\mu)} + a_{1\nu}, \ldots, u_p^{(\mu)} + a_{p\nu}|\,\ldots) = F(\ldots\,|u_1^{(\mu)}, \ldots, u_p^{(\mu)}|\,\ldots)\,e^{-r^2(2u_\nu^{(\mu)} + a_{\nu\nu})}$$

genügt, die für $\mu = 1, 2, \ldots, n$; $\nu = 1, 2, \ldots, p$ gelten. Zur Abkürzung sind dabei unter dem Functionszeichen von den n, je p Glieder u enthaltenden, und durch Verticalstriche getrennten Systemen der np Variablen u die $n-1$ Systeme unterdrückt, in welchen kein Glied eine Aenderung erfährt. Wendet man nun den am Schlusse des Art. 3. aufgestellten Satz an, nachdem man den sämmtlichen darin vorkommenden Constanten g, h den Werth Null ertheilt hat, so ergibt sich zunächst, dass die Function F, als Function der p Variablen $u_1^{(\mu)}, u_2^{(\mu)}, \ldots, u_p^{(\mu)}$ betrachtet, sich immer und nur auf eine Weise darstellen lässt in der Form:

$$(3) \quad F(\ldots \left| u_1^{(\mu)}, \ldots, u_p^{(\mu)} \right| \ldots) = \sum_{\substack{\alpha_1^{(\mu)}, \ldots, \alpha_p^{(\mu)} \\ \beta_1^{(\mu)}, \ldots, \beta_p^{(\mu)}}}^{0, 1, \ldots, r-1} K \begin{bmatrix} \alpha_1^{(\mu)} \ldots \alpha_p^{(\mu)} \\ \beta_1^{(\mu)} \ldots \beta_p^{(\mu)} \end{bmatrix} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1^{(\mu)}}{r} \ldots \frac{\alpha_p^{(\mu)}}{r} \\ \frac{\beta_1^{(\mu)}}{r} \ldots \frac{\beta_p^{(\mu)}}{r} \end{bmatrix} ((r u^{(\mu)})),$$

wobei die K von den p Variablen $u_1^{(\mu)}, \ldots, u_p^{(\mu)}$ vollständig freie Grössen bezeichnen, die aber noch von den übrigen $(n-1)p$, von $u_1^{(\mu)}, \ldots, u_p^{(\mu)}$ verschiedenen, Variablen u abhängen.

Die Gleichung (3) zeigt, dass die Function F eine homogene lineare Function der r^{2p} linearunabhängigen Functionen:

$$\vartheta \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1^{(\mu)}}{r} \ldots \frac{\alpha_p^{(\mu)}}{r} \\ \frac{\beta_1^{(\mu)}}{r} \ldots \frac{\beta_p^{(\mu)}}{r} \end{bmatrix} ((r u^{(\mu)})), \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1^{(\mu)}, \ldots, \alpha_p^{(\mu)} = 0, 1, \ldots, r-1 \\ \beta_1^{(\mu)}, \ldots, \beta_p^{(\mu)} = 0, 1, \ldots, r-1 \end{pmatrix}$$

mit in Bezug auf $(u^{(\mu)})$ constanten Coefficienten ist. Da hierbei für μ jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ gesetzt werden darf, so ist die Function F gleichzeitig eine homogene lineare Function:

$$\text{der } r^{2p} \text{ Functionen } \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1^{(1)}}{r} \ldots \frac{\alpha_p^{(1)}}{r} \\ \frac{\beta_1^{(1)}}{r} \ldots \frac{\beta_p^{(1)}}{r} \end{bmatrix} ((r u^{(1)})), \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_p^{(1)} = 0, 1, \ldots, r-1 \\ \beta_1^{(1)}, \ldots, \beta_p^{(1)} = 0, 1, \ldots, r-1 \end{pmatrix},$$

$$\text{der } r^{2p} \text{ Functionen } \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1^{(2)}}{r} \ldots \frac{\alpha_p^{(2)}}{r} \\ \frac{\beta_1^{(2)}}{r} \ldots \frac{\beta_p^{(2)}}{r} \end{bmatrix} ((r u^{(2)})), \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)}, \ldots, \alpha_p^{(2)} = 0, 1, \ldots, r-1 \\ \beta_1^{(2)}, \ldots, \beta_p^{(2)} = 0, 1, \ldots, r-1 \end{pmatrix},$$

. . . .

$$\text{der } r^{2p} \text{ Functionen } \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1^{(n)}}{r} \ldots \frac{\alpha_p^{(n)}}{r} \\ \frac{\beta_1^{(n)}}{r} \ldots \frac{\beta_p^{(n)}}{r} \end{bmatrix} ((r u^{(n)})), \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_p^{(n)} = 0, 1, \ldots, r-1 \\ \beta_1^{(n)}, \ldots, \beta_p^{(n)} = 0, 1, \ldots, r-1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt aber — indem man noch berücksichtigt, dass nicht nur die r^{2p} ϑ-Functionen eines jeden der n soeben aufgestellten Systeme, sondern auch, weil zwischen den np Grössen $(u^{(1)}), (u^{(2)}), \ldots, (u^{(n)})$ keinerlei Beziehungen bestehen, die r^{2np} Producte, welche aus der allgemeinen Form:

$$\vartheta \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1^{(1)}}{r} \ldots \frac{\alpha_p^{(1)}}{r} \\ \frac{\beta_1^{(1)}}{r} \ldots \frac{\beta_p^{(1)}}{r} \end{bmatrix} ((r u^{(1)})) \; \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1^{(2)}}{r} \ldots \frac{\alpha_p^{(2)}}{r} \\ \frac{\beta_1^{(2)}}{r} \ldots \frac{\beta_p^{(2)}}{r} \end{bmatrix} ((r u^{(2)})) \ldots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1^{(n)}}{r} \ldots \frac{\alpha_p^{(n)}}{r} \\ \frac{\beta_1^{(n)}}{r} \ldots \frac{\beta_p^{(n)}}{r} \end{bmatrix} ((r u^{(n)}))$$

hervorgehen, wenn man darin für die $2np$ Buchstaben α, β auf alle möglichen Weisen die Zahlen $0, 1, \ldots, r-1$ einführt, linearunabhängig sind — dass die Function F sich immer und nur auf eine Weise darstellen lässt in der Form:

$$(4_0)\; F = \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,r-1} C \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} \ldots \alpha_p^{(1)} & \ldots & \alpha_1^{(n)} \ldots \alpha_p^{(n)} \\ \beta_1^{(1)} \ldots \beta_p^{(1)} & \ldots & \beta_1^{(n)} \ldots \beta_p^{(n)} \end{bmatrix} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1^{(1)}}{r} \ldots \frac{\alpha_p^{(1)}}{r} \\ \frac{\beta_1^{(1)}}{r} \ldots \frac{\beta_p^{(1)}}{r} \end{bmatrix} ((ru^{(1)})) \ldots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1^{(n)}}{r} \ldots \frac{\alpha_p^{(n)}}{r} \\ \frac{\beta_1^{(n)}}{r} \ldots \frac{\beta_p^{(n)}}{r} \end{bmatrix} ((ru^{(n)})),$$

wobei die C von allen Variablen u vollständig freie, ihrem Werthe nach noch zu bestimmende Constanten bezeichnen, und die Summation über alle Terme zu erstrecken ist, die aus dem allgemeinen Gliede entstehen, indem man an Stelle des Systems der $2np$ Summationsbuchstaben α, β der Reihe nach sämmtliche r^{2np} Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur $2np^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt.

5.

Ersetzt man auf der linken Seite der Gleichung (4_0) die Function F durch das mit ihr identische ϑ-Product und führt gleichzeitig auf der rechten Seite eine abgekürzte Bezeichnung ein, so nimmt die genannte Gleichung die Form an:

$$(4)\quad \vartheta((ru'^{(1)})) \ldots \vartheta((ru'^{(n)})) = \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,r-1} C \begin{bmatrix} \alpha^{(1)} & \ldots & \alpha^{(n)} \\ \beta^{(1)} & \ldots & \beta^{(n)} \end{bmatrix} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{(1)}}{r} \\ \frac{\beta^{(1)}}{r} \end{bmatrix} ((ru^{(1)})) \ldots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{(n)}}{r} \\ \frac{\beta^{(n)}}{r} \end{bmatrix} ((ru^{(n)})).$$

Aus dieser Gleichung soll jetzt zum Zwecke der Constantenbestimmung eine allgemeinere abgeleitet werden.

Lässt man die Systeme:

$$(ru^{(1)}), \ldots, (ru^{(n)}) \quad \text{übergehen in} \quad \left(ru^{(1)} + \begin{vmatrix} \varrho^{(1)} \\ \sigma^{(1)} \end{vmatrix}\right), \ldots, \left(ru^{(n)} + \begin{vmatrix} \varrho^{(n)} \\ \sigma^{(n)} \end{vmatrix}\right),$$

unter ϱ, σ ganze Zahlen verstanden, so gehen dadurch gleichzeitig die Systeme:

$$(ru'^{(1)}), \ldots, (ru'^{(n)}) \quad \text{über in} \quad \left(ru'^{(1)} + \begin{vmatrix} \frac{\bar\varrho^{(1)}}{r} \\ \frac{\bar\sigma^{(1)}}{r} \end{vmatrix}\right), \ldots, \left(ru'^{(n)} + \begin{vmatrix} \frac{\bar\varrho^{(n)}}{r} \\ \frac{\bar\sigma^{(n)}}{r} \end{vmatrix}\right),$$

wenn für $\nu = 1, 2, \ldots, p$:

$$c_{11}\varrho_\nu^{(1)} + \ldots + c_{1n}\varrho_\nu^{(n)} = \bar\varrho_\nu^{(1)}, \qquad c_{11}\sigma_\nu^{(1)} + \ldots + c_{1n}\sigma_\nu^{(n)} = \bar\sigma_\nu^{(1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_{n1}\varrho_\nu^{(1)} + \ldots + c_{nn}\varrho_\nu^{(n)} = \bar\varrho_\nu^{(n)}, \qquad c_{n1}\sigma_\nu^{(1)} + \ldots + c_{nn}\sigma_\nu^{(n)} = \bar\sigma_\nu^{(n)},$$

gesetzt wird. Aendert man nun in der Gleichung (4) die Systeme (ru), (ru') in der angegebenen Weise und transformirt die auf der linken Seite stehenden ϑ-Functionen

unter Anwendung der aus Gleichung (A) des Art. 1. leicht herzustellenden, für $\mu = 1, 2, \ldots, n$ geltenden Formel:

$$\vartheta\left(\!\!\left(ru'^{(\mu)} + \left|\begin{matrix}\frac{\bar\varrho^{(\mu)}}{r}\\ \frac{\bar\sigma^{(\mu)}}{r}\end{matrix}\right|\right)\!\!\right) = \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\bar\varrho^{(\mu)}}{r}\\ \frac{\bar\sigma^{(\mu)}}{r}\end{bmatrix}\left(\!\left(ru'^{(\mu)}\right)\!\right) c^{-\frac{1}{r^2}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p} a_{\nu\nu'}\bar\varrho_\nu^{(\mu)}\bar\varrho_{\nu'}^{(\mu)} - 2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\bar\varrho_\nu^{(\mu)} u'^{(\mu)}_\nu - \frac{2\pi i}{r^2}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\bar\varrho_\nu^{(\mu)}\bar\sigma_\nu^{(\mu)}},$$

dagegen die im allgemeinen Gliede der rechten Seite stehenden ϑ-Functionen unter Anwendung der aus Gleichung (D) des Art. 1. unmittelbar sich ergebenden, ebenfalls für $\mu = 1, 2, \ldots, n$ geltenden Formel:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\alpha^{(\mu)}}{r}\\ \frac{\beta^{(\mu)}}{r}\end{bmatrix}\left(\!\!\left(ru^{(\mu)} + \left|\begin{matrix}\varrho^{(\mu)}\\ \sigma^{(\mu)}\end{matrix}\right|\right)\!\!\right)$$

$$= \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\alpha^{(\mu)}}{r}\\ \frac{\beta^{(\mu)}}{r}\end{bmatrix}\left(\!\left(ru^{(\mu)}\right)\!\right) e^{-\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p} a_{\nu\nu'}\varrho_\nu^{(\mu)}\varrho_{\nu'}^{(\mu)} - 2r\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\varrho_\nu^{(\mu)}u_\nu^{(\mu)} + \frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\left(\alpha_\nu^{(\mu)}\sigma_\nu^{(\mu)} - \beta_\nu^{(\mu)}\varrho_\nu^{(\mu)}\right)},$$

so erhält man, wenn man die auftretenden Exponentialgrössen passend vereinigt, zunächst die Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\bar\varrho^{(1)}}{r}\\ \frac{\bar\sigma^{(1)}}{r}\end{bmatrix}\left(\!\left(ru'^{(1)}\right)\!\right)\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\bar\varrho^{(n)}}{r}\\ \frac{\bar\sigma^{(n)}}{r}\end{bmatrix}\left(\!\left(ru'^{(n)}\right)\!\right)$$

$$\times e^{-\frac{1}{r^2}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p} a_{\nu\nu'}\left\{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=n}\bar\varrho_\nu^{(\mu)}\bar\varrho_{\nu'}^{(\mu)}\right\}}\; e^{-2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\left\{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=n}\bar\varrho_\nu^{(\mu)}u'^{(\mu)}_\nu\right\}}\; e^{-\frac{2\pi i}{r^2}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\left\{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=n}\bar\varrho_\nu^{(\mu)}\bar\sigma_\nu^{(\mu)}\right\}}$$

$$= \sum_{\alpha,\,\beta}^{0,1,\ldots,r-1} C\begin{bmatrix}\alpha^{(1)}\ldots\alpha^{(n)}\\ \beta^{(1)}\ldots\beta^{(n)}\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\alpha^{(1)}}{r}\\ \frac{\beta^{(1)}}{r}\end{bmatrix}\left(\!\left(ru^{(1)}\right)\!\right)\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\alpha^{(n)}}{r}\\ \frac{\beta^{(n)}}{r}\end{bmatrix}\left(\!\left(ru^{(n)}\right)\!\right) c^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=n}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\left(\alpha_\nu^{(\mu)}\sigma_\nu^{(\mu)} - \beta_\nu^{(\mu)}\varrho_\nu^{(\mu)}\right)}$$

$$\times e^{-\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p} a_{\nu\nu'}\left\{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=n}\varrho_\nu^{(\mu)}\varrho_{\nu'}^{(\mu)}\right\}}\; e^{-2r\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\left\{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=n}\varrho_\nu^{(\mu)}u_\nu^{(\mu)}\right\}}.$$

In Folge der Beziehungen, die zwischen den u und u', zwischen den ϱ und $\bar\varrho$, endlich zwischen den σ und $\bar\sigma$ bestehen, wird das System linearer Gleichungen:

$$\begin{gathered} c_{11}\,x^{(1)} + \cdots + c_{1n}\,x^{(n)} = rx'^{(1)}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ c_{n1}\,x^{(1)} + \cdots + c_{nn}\,x^{(n)} = rx'^{(n)}, \end{gathered}$$

erfüllt, wenn man allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \ldots, n$:

1) $x^{(\mu)}$ durch $u_\nu^{(\mu)}$ und gleichzeitig $x'^{(\mu)}$ durch $u'^{(\mu)}_\nu$,

2) $x^{(\mu)}$ durch $\varrho_\nu^{(\mu)}$ und gleichzeitig $x'^{(\mu)}$ durch $\frac{\bar\varrho_\nu^{(\mu)}}{r}$,

3) $x^{(\mu)}$ durch $\varrho_\nu^{(\mu)}$ und gleichzeitig $x'^{(\mu)}$ durch $\dfrac{\bar{\varrho}_{\nu'}^{(\mu)}}{r}$,

4) $x^{(\mu)}$ durch $\sigma_\nu^{(\mu)}$ und gleichzeitig $x'^{(\mu)}$ durch $\dfrac{\bar{\sigma}_\nu^{(\mu)}}{r}$,

ersetzt. Dasselbe System wird daher auch erfüllt, wenn man:

5) $x^{(\mu)}$ durch $\varrho_\nu^{(\mu)} + \varrho_{\nu'}^{(\mu)}$ und gleichzeitig $x'^{(\mu)}$ durch $\dfrac{\bar{\varrho}_\nu^{(\mu)}}{r} + \dfrac{\bar{\varrho}_{\nu'}^{(\mu)}}{r}$,

6) $x^{(\mu)}$ durch $u_\nu^{(\mu)} + \varrho_\nu^{(\mu)}$ und gleichzeitig $x'^{(\mu)}$ durch $u_\nu'^{(\mu)} + \dfrac{\bar{\varrho}_\nu^{(\mu)}}{r}$,

7) $x^{(\mu)}$ durch $\varrho_\nu^{(\mu)} + \sigma_\nu^{(\mu)}$ und gleichzeitig $x'^{(\mu)}$ durch $\dfrac{\bar{\varrho}_\nu^{(\mu)}}{r} + \dfrac{\bar{\sigma}_\nu^{(\mu)}}{r}$,

ersetzt. Nun folgt aber aus dem obigen Systeme:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} x'^{(\mu)2} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} x^{(\mu)2},$$

und es bestehen daher auch, entsprechend den sieben eben aufgestellten Lösungen, die Gleichungen:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} u_\nu'^{(\mu)2} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} u_\nu^{(\mu)2},\ \frac{1}{r^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \bar{\varrho}_\nu^{(\mu)2} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \varrho_\nu^{(\mu)2},\ \frac{1}{r^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \bar{\varrho}_{\nu'}^{(\mu)2} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \varrho_{\nu'}^{(\mu)2},\ \frac{1}{r^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \bar{\sigma}_\nu^{(\mu)2} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sigma_\nu^{(\mu)2},$$

$$\frac{1}{r^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\left(\bar{\varrho}_\nu^{(\mu)} + \bar{\varrho}_{\nu'}^{(\mu)}\right)^2 = \sum_{\mu=1}^{\mu=n}\left(\varrho_\nu^{(\mu)} + \varrho_{\nu'}^{(\mu)}\right)^2,\ \sum_{\mu=1}^{\mu=n}\left(u_\nu'^{(\mu)} + \frac{\bar{\varrho}_\nu^{(\mu)}}{r}\right)^2 = \sum_{\mu=1}^{\mu=n}\left(u_\nu^{(\mu)} + \varrho_\nu^{(\mu)}\right)^2,$$

$$\frac{1}{r^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\left(\bar{\varrho}_\nu^{(\mu)} + \bar{\sigma}_\nu^{(\mu)}\right)^2 = \sum_{\mu=1}^{\mu=n}\left(\varrho_\nu^{(\mu)} + \sigma_\nu^{(\mu)}\right)^2.$$

Löst man in den drei letzten Gleichungen die Klammern auf und zerstört die auftretenden Quadrate mit Hülfe der vier vorhergehenden Gleichungen, so erhält man, nachdem man noch linke und rechte Seite durch 2 dividirt hat, schliesslich die Relationen:

$$\frac{1}{r^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \bar{\varrho}_\nu^{(\mu)}\,\bar{\varrho}_{\nu'}^{(\mu)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \varrho_\nu^{(\mu)}\,\varrho_{\nu'}^{(\mu)},\ \frac{1}{r}\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \varrho_\nu^{(\mu)}\,u_\nu'^{(\mu)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \varrho_\nu^{(\mu)}\,u^{(\mu)},\ \frac{1}{r^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \varrho_\nu^{(\mu)}\,\bar{\sigma}_\nu^{(\mu)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \varrho_\nu^{(\mu)}\,\sigma_\nu^{(\mu)},$$

die für jedes ν, ν' von 1 bis n gelten. Diese drei Relationen zeigen aber, dass in der zuletzt gewonnenen ϑ-Formel zunächst die beiden ersten Exponentialfactoren auf der linken Seite der Gleichung sich gegen die beiden letzten auf der rechten Seite vorkommenden einzeln aufheben, und ferner, dass der dritte Exponentialfactor auf der linken Seite, weil die ϱ, σ ganze Zahlen sind, den Werth 1 hat. Es fallen demnach aus der erwähnten Formel alle Exponentialfactoren bis auf den einen, der auf der rechten Seite an erster Stelle steht, weg, und man erhält so die gewünschte allgemeinere Formel:

$$(5)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\overline{\varrho}^{(1)}}{r}\\ \frac{\overline{\sigma}^{(1)}}{r}\end{bmatrix}(\!(ru'^{(1)})\!)\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\overline{\varrho}^{(n)}}{r}\\ \frac{\overline{\sigma}^{(n)}}{r}\end{bmatrix}(\!(ru'^{(n)})\!)$$

$$=\sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,r-1} C\begin{bmatrix}\alpha^{(1)}&\ldots&\alpha^{(n)}\\ \beta^{(1)}&\ldots&\beta^{(n)}\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\alpha^{(1)}}{r}\\ \frac{\beta^{(1)}}{r}\end{bmatrix}(\!(ru^{(1)})\!)\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\alpha^{(n)}}{r}\\ \frac{\beta^{(n)}}{r}\end{bmatrix}(\!(ru^{(n)})\!)\, e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=n}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\left(\alpha_\nu^{(\mu)}\sigma_\nu^{(\mu)}-\beta_\nu^{(\mu)}\varrho_\nu^{(\mu)}\right)}.$$

Denkt man sich in der gewonnenen Formel an Stelle des Systems der $2np$ ganzen Zahlen ϱ, σ der Reihe nach die r^{2np} Variationen der r Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur $2np^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung gesetzt, so entstehen im Ganzen $N=r^{2np}$ verschiedene Gleichungen, die addirt die Formel:

$$\sum_{\varrho,\sigma}^{0,1,\ldots,r-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\overline{\varrho}^{(1)}}{r}\\ \frac{\overline{\sigma}^{(1)}}{r}\end{bmatrix}(\!(ru'^{(1)})\!)\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\overline{\varrho}^{(n)}}{r}\\ \frac{\overline{\sigma}^{(n)}}{r}\end{bmatrix}(\!(ru'^{(n)})\!)$$

$$=\sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,r-1} C\begin{bmatrix}\alpha^{(1)}&\ldots&\alpha^{(n)}\\ \beta^{(1)}&\ldots&\beta^{(n)}\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\alpha^{(1)}}{r}\\ \frac{\beta^{(1)}}{r}\end{bmatrix}(\!(ru^{(1)})\!)\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\alpha^{(n)}}{r}\\ \frac{\beta^{(n)}}{r}\end{bmatrix}(\!(ru^{(n)})\!)\left\{\sum_{\varrho,\sigma}^{0,1,\ldots,r-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=n}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\left(\alpha_\nu^{(\mu)}\sigma_\nu^{(\mu)}-\beta_\nu^{(\mu)}\varrho_\nu^{(\mu)}\right)}\right\}$$

geben. Nun besitzt aber die im allgemeinen Gliede der rechten Seite vorkommende, in besondere Klammern eingeschlossene Summe — wie sich durch Schlüsse, die den in der vorhergehenden Arbeit an betreffender Stelle (pag. 18, 19) gemachten ganz analog sind, zeigen lässt — immer den Werth Null, wenn auch nur eine der $2np$ Grössen α, β von Null verschieden ist, dagegen den Werth N, wenn sämmtliche Grössen α, β gleich Null sind. In Folge dessen fallen in der die rechte Seite der letzten Gleichung bildenden Summe alle Glieder weg bis auf das eine, für welches die sämmtlichen $2np$ Grössen α, β den Werth Null haben, und man erhält so, indem man rechte und linke Seite der Gleichung vertauscht und $C\begin{bmatrix}0&\ldots&0\\0&\ldots&0\end{bmatrix}$ einfacher mit C bezeichnet, die Formel:

$$(6_0)\qquad NC\vartheta(\!(ru^{(1)})\!)\ldots\vartheta(\!(ru^{(n)})\!)=\sum_{\varrho,\sigma}^{0,1,\ldots,r-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\overline{\varrho}^{(1)}}{r}\\ \frac{\overline{\sigma}^{(1)}}{r}\end{bmatrix}(\!(ru'^{(1)})\!)\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\overline{\varrho}^{(n)}}{r}\\ \frac{\overline{\sigma}^{(n)}}{r}\end{bmatrix}(\!(ru'^{(n)})\!).$$

Unter der gemachten Voraussetzung, dass das System (S) ein involutorisches ist, kann man, da die u vollständig unabhängige Variablen sind, in allen aufgestellten Formeln die Grössen u mit den Grössen u' beziehlich vertauschen. Führt man diese Vertauschung in der Gleichung (6_0) aus und ersetzt zugleich die Summationsbuchstaben ϱ, σ durch die Buchstaben α, β, entsprechend auch die Grössen $\overline{\varrho}$, $\overline{\sigma}$ durch Grössen $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, welche von den Grössen α, β genau auf dieselbe Weise abhängen, wie die $\overline{\varrho}$, $\overline{\sigma}$ von den ϱ, σ, so entsteht die Gleichung:

$$(6)\qquad NC\vartheta(\!(ru'^{(1)})\!)\ldots\vartheta(\!(ru'^{(n)})\!)=\sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,r-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\overline{\alpha}^{(1)}}{r}\\ \frac{\overline{\beta}^{(1)}}{r}\end{bmatrix}(\!(ru^{(1)})\!)\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\overline{\alpha}^{(n)}}{r}\\ \frac{\overline{\beta}^{(n)}}{r}\end{bmatrix}(\!(ru^{(n)})\!).$$

Aendert man in dieser Gleichung die Systeme (ru), (ru') in derselben Weise, wie es früher bei der Gleichung (4) geschehen, so kann man die an genannter Stelle weiter gemachten Schlüsse, die von der Gleichung (4) zur Gleichung (5) führten, wörtlich hierher übertragen und gelangt auf diese Weise zu der neuen Gleichung:

$$(7)\qquad N C\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varrho^{(1)}}{r}\\ \frac{\sigma^{(1)}}{r}\end{bmatrix}\!\left(\!\left(r u'^{(1)}\right)\!\right)\dots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varrho^{(n)}}{r}\\ \frac{\sigma^{(n)}}{r}\end{bmatrix}\!\left(\!\left(r u'^{(n)}\right)\!\right)$$

$$=\sum_{\bar\alpha,\,\bar\beta}^{0,1,\dots,r-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\bar\alpha^{(1)}}{r}\\ \frac{\bar\beta^{(1)}}{r}\end{bmatrix}\!\left(\!\left(r u^{(1)}\right)\!\right)\dots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\bar\alpha^{(n)}}{r}\\ \frac{\bar\beta^{(n)}}{r}\end{bmatrix}\!\left(\!\left(r u^{(n)}\right)\!\right) e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=n}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\left(\bar\alpha_\nu^{(\mu)}\sigma_\nu^{(\mu)}-\bar\beta_\nu^{(\mu)}\varrho_\nu^{(\mu)}\right)}.$$

Durch die Gleichung (6), aber auch durch die Gleichung (7), erscheint das aufgestellte Problem der Bestimmung der Constanten $C[\,\vdots\,]$, wenn man von der einen noch unbestimmten Constante C absieht, in merkwürdiger Weise gelöst, und zwar entspricht die Gleichung (6) der Gleichung (4), die Gleichung (7) der Gleichung (5), da nach Früherem die Bestimmung der Constanten $C[\,\vdots\,]$ nur auf eine Weise möglich ist. Der Werth der einen noch unbestimmten Constante C kann leicht auf folgende Weise ermittelt werden. Ersetzt man in der Gleichung (6_0) das ϑ-Product, welches auf der rechten Seite als allgemeines Glied hinter dem Summenzeichen steht, durch den Ausdruck, welchen die Formel (7) dafür liefert, so entsteht die Gleichung:

$$(8)\qquad N^2 C^2\,\vartheta\left(\!\left(r u^{(1)}\right)\!\right)\dots\vartheta\left(\!\left(r u^{(n)}\right)\!\right)$$

$$=\sum_{\bar\alpha,\,\bar\beta}^{0,1,\dots,r-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\bar\alpha^{(1)}}{r}\\ \frac{\bar\beta^{(1)}}{r}\end{bmatrix}\!\left(\!\left(r u^{(1)}\right)\!\right)\dots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\bar\alpha^{(n)}}{r}\\ \frac{\bar\beta^{(n)}}{r}\end{bmatrix}\!\left(\!\left(r u^{(n)}\right)\!\right)\left\{\sum_{\varrho,\,\sigma}^{0,1,\dots,r-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=n}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\left(\bar\alpha_\nu^{(\mu)}\sigma_\nu^{(\mu)}-\bar\beta_\nu^{(\mu)}\varrho_\nu^{(\mu)}\right)}\right\}.$$

Die bei dieser Gleichung im allgemeinen Gliede der rechten Seite vorkommende, in besondere Klammern eingeschlossene Summe, die in Bezug auf jede der Grössen $\bar\alpha$, $\bar\beta$ periodisch ist mit der Periode r, besitzt immer den Werth Null, wenn auch nur eine der $2np$ ganzen Zahlen $\bar\alpha$, $\bar\beta$ nicht ein ganzes Vielfaches von r ist, dagegen den Werth N, wenn sämmtliche Zahlen $\bar\alpha$, $\bar\beta$ ganze Vielfache von r sind. Es fallen daher in der die rechte Seite der letzten Gleichung bildenden Summe alle Glieder weg bis auf diejenigen, bei welchen für jedes μ von 1 bis n und jedes ν von 1 bis p $\bar\alpha_\nu^{(\mu)} \equiv 0 \pmod{r}$, $\bar\beta_\nu^{(\mu)} \equiv 0 \pmod{r}$ ist. Die Anzahl dieser stehenbleibenden Glieder beträgt aber, wie leicht ersichtlich, s^{2p}, wenn mit s die Anzahl der sämmtlichen nach dem Modul r incongruenten Lösungen des Congruenzensystems:

$$\begin{aligned}
c_{11}x^{(1)} + \dots + c_{1n}x^{(n)} &\equiv 0 \pmod{r},\\
c_{21}x^{(1)} + \dots + c_{2n}x^{(n)} &\equiv 0 \pmod{r},\\
\dots\dots\dots\dots&\dots\dots\\
c_{n1}x^{(1)} + \dots + c_{nn}x^{(n)} &\equiv 0 \pmod{r},
\end{aligned}$$

bezeichnet wird; auch kann ein jedes dieser Glieder in die Form $N\vartheta((ru^{(1)}))\ldots\vartheta((ru^{(n)}))$ gebracht werden, indem man die in ihm vorkommenden, wegen $\bar{\alpha}_\nu^{(\mu)} \equiv 0 \pmod{r}$, $\bar{\beta}_\nu^{(\mu)} \equiv 0 \pmod{r}$ nur ganze Zahlen als Elemente enthaltenden Characteristiken, mit Rücksicht auf die Formeln (B) des Art. 1., sämmtlich durch die Characteristik $\begin{bmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 0 \end{bmatrix}$ ersetzt. Die Gleichung (8) reducirt sich dann auf die Gleichung:

$$N^2C^2\vartheta((ru^{(1)}))\ldots\vartheta((ru^{(n)})) = s^{2p}N\vartheta((ru^{(1)}))\ldots\vartheta((ru^{(n)})),$$

woraus sich $N^2C^2 = s^{2p}N$ und, da $N = r^{2np}$ ist:

$$NC = \pm (r^n s)^p$$

ergibt. Was das Vorzeichen in dem für NC gefundenen Ausdrucke betrifft, so kann man auf Grund der Formel (6), unter Wiederholung der in der vorhergehenden Arbeit an entsprechender Stelle (pag. 19, 20) gemachten Schlüsse, zunächst zeigen, dass dasselbe von den Werthen der ϑ-Modulen $a_{\mu\mu'}$ unabhängig ist, und weiter dann, indem man, ebenso wie dort, sämmtliche Variablen u sowie alle ϑ-Modulen von der Form $a_{\mu\mu'}$ $(\mu \gtrless \mu')$ gleich Null setzt und die reellen Theile der übrig bleibenden ϑ-Modulen $a_{\mu\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ gegen $-\infty$ führt, dass von den beiden möglichen Vorzeichen nur das obere zulässig ist. Setzt man den für NC gefundenen Werth in die Gleichung (6) ein, so erhält man die Endformel:

$$(9)\qquad (r^n s)^p\vartheta((ru'^{(1)}))\ldots\vartheta((ru'^{(n)})) = \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(1)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(1)}}{r} \end{bmatrix}((ru^{(1)}))\ldots\vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(n)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(n)}}{r} \end{bmatrix}((ru^{(n)})),$$

wobei, wie schon früher erwähnt, die $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ lineare Ausdrücke der α, β sind, definirt durch die für $\nu = 1, 2, \ldots, p$ geltenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_\nu^{(1)} &= c_{11}\alpha_\nu^{(1)} + \ldots + c_{1n}\alpha_\nu^{(n)}, & \bar{\beta}_\nu^{(1)} &= c_{11}\beta_\nu^{(1)} + \ldots + c_{1n}\beta_\nu^{(n)}, \\ &\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots \\ \bar{\alpha}_\nu^{(n)} &= c_{n1}\alpha_\nu^{(1)} + \ldots + c_{nn}\alpha_\nu^{(n)}, & \bar{\beta}_\nu^{(n)} &= c_{n1}\beta_\nu^{(1)} + \ldots + c_{nn}\beta_\nu^{(n)}. \end{aligned}$$

Die auf der rechten Seite der Gleichung (9) als Summanden auftretenden r^{2np} ϑ-Producte können in $\frac{r^{2np}}{s^{2p}}$ Gruppen geordnet werden, indem man zu einer Gruppe jedesmal diejenigen ϑ-Producte, immer s^{2p} an der Zahl, zusammenfasst, für welche sich die Werthe der $2np$ Grössen $\frac{\bar{\alpha}_\nu^{(\mu)}}{r}$, $\frac{\bar{\beta}_\nu^{(\mu)}}{r}$ nur um ganze Zahlen ändern, wenn man von einem dieser s^{2p} ϑ-Producte zu einem anderen derselben übergeht. Man zeigt dann leicht, dass die s^{2p} in einer Gruppe vorkommenden ϑ-Producte denselben Werth besitzen, und kann daher in obiger Summe jede solche Gruppe von Summanden durch das s^{2p}-fache eines beliebigen Summanden ersetzen. Führt man diese Vereinigung für jede der $\frac{r^{2np}}{s^{2p}}$

Gruppen aus, so geht die rechte Seite der Gleichung (9) in das s^{2p}-fache einer Summe von $\frac{r^{2np}}{s^{2p}}$ wesentlich verschiedenen, d. h. durch Anwendung der Formeln (*B*) des Art. 1. nicht auf einander reducirbaren ϑ-Producten über.

6.

Die Formel (9) kann als specieller Fall einer allgemeineren Formel angesehen werden, zu welcher man auf folgende Weise gelangt.

Lässt man die Grössen:

$$(ru^{(1)}), \ldots, (ru^{(n)}) \text{ in } \left(ru^{(1)} + \begin{vmatrix} \frac{\gamma^{(1)}}{r} \\ \frac{\delta^{(1)}}{r} \end{vmatrix}\right), \ldots, \left(ru^{(n)} + \begin{vmatrix} \frac{\gamma^{(n)}}{r} \\ \frac{\delta^{(n)}}{r} \end{vmatrix}\right)$$

beziehlich übergehen, unter γ, δ ganze Zahlen verstanden, so geht dadurch:

$$(ru'^{(1)}) \text{ über in } \left(ru'^{(1)} + \begin{vmatrix} \frac{c_{11}\gamma^{(1)} + \cdots + c_{1n}\gamma^{(n)}}{r^2} \\ \frac{c_{11}\delta^{(1)} + \cdots + c_{1n}\delta^{(n)}}{r^2} \end{vmatrix}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(ru'^{(n)}) \text{ über in } \left(ru'^{(n)} + \begin{vmatrix} \frac{c_{n1}\gamma^{(1)} + \cdots + c_{nn}\gamma^{(n)}}{r^2} \\ \frac{c_{n1}\delta^{(1)} + \cdots + c_{nn}\delta^{(n)}}{r^2} \end{vmatrix}\right).$$

Aendert man nun in der Formel (7) die Argumente (ru), (ru') in dieser Weise, so kann man, mit Hülfe der Formel (*A*) des Art. 1., die Zunahmen, welche die Argumente (ru), (ru') erfahren haben, durch entsprechende Aenderungen der Charakteristiken, unter Hinzufügung von Exponentialgrössen, wieder wegschaffen. Stellt man dann weiter noch die Bedingung, dass die dadurch auf der linken Seite entstehenden Charakteristiken denselben Typus besitzen, wie die auf der rechten Seite vorkommenden, d. h. dass ihre sämmtlichen Elemente sich in die Form von Brüchen mit dem gemeinsamen Nenner r bringen lassen, so müssen die oben angeschriebenen, mit dem Nenner r^2 versehenen Brüche, welche die Aenderungen der Systeme (ru') darstellen, sich auf solche mit dem Nenner r reduciren lassen, ihre Zähler also sämmtlich durch r ohne Rest theilbar sein, oder, was dasselbe, es muss jedes der p, den Werthen $\nu = 1, 2, \ldots, p$ entsprechenden Systeme $\gamma_\nu^{(1)}, \gamma_\nu^{(2)}, \ldots, \gamma_\nu^{(n)}$, und ebenso jedes der p Systeme $\delta_\nu^{(1)}, \delta_\nu^{(2)}, \ldots, \delta_\nu^{(n)}$ eine Lösung des schon im vorigen Artikel aufgestellten Congruenzensystems:

$$
\begin{aligned}
c_{11} x^{(1)} + \cdots + c_{1n} x^{(n)} &\equiv 0 \pmod{r}, \\
c_{21} x^{(1)} + \cdots + c_{2n} x^{(n)} &\equiv 0 \pmod{r}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
c_{n1} x^{(1)} + \cdots + c_{nn} x^{(n)} &\equiv 0 \pmod{r},
\end{aligned}
$$

sein.

Erfüllen die ganzen Zahlen γ, δ diese Bedingungen, und setzt man dann für $\nu = 1, 2, \ldots, p$:

$$
\begin{aligned}
c_{11} \gamma_\nu^{(1)} + \cdots + c_{1n} \gamma_\nu^{(n)} &= r \gamma'^{(1)}_\nu, \qquad & c_{11} \delta_\nu^{(1)} + \cdots + c_{1n} \delta_\nu^{(n)} &= r \delta'^{(1)}_\nu, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
c_{n1} \gamma_\nu^{(1)} + \cdots + c_{nn} \gamma_\nu^{(n)} &= r \gamma'^{(n)}_\nu, \qquad & c_{n1} \delta_\nu^{(1)} + \cdots + c_{nn} \delta_\nu^{(n)} &= r \delta'^{(n)}_\nu,
\end{aligned}
$$

so sind die dadurch eingeführten neuen Grössen γ', δ' ebenfalls ganze Zahlen. Da weiter die Gleichungen, welche dieselben definiren, ein involutorisches System bilden, so können in denselben die γ, δ mit den γ', δ' beziehlich vertauscht werden. Es zeigt sich dann, dass die Grössen γ', δ' gleichfalls Lösungen des oben aufgestellten Congruenzensystems sind, und es können daher in der ganzen Untersuchung, speciell also auch in der abzuleitenden Endformel (10), die γ, δ mit den γ', δ' vertauscht werden.

Unter Einführung der Grössen γ', δ' entspricht jetzt dem Uebergange von:

$$
(r u^{(1)}), \ldots, (r u^{(n)}) \text{ in } \left(r u^{(1)} + \left| \begin{matrix} \frac{\gamma^{(1)}}{r} \\ \frac{\delta^{(1)}}{r} \end{matrix} \right| \right), \ldots, \left(r u^{(n)} + \left| \begin{matrix} \frac{\gamma^{(n)}}{r} \\ \frac{\delta^{(n)}}{r} \end{matrix} \right| \right)
$$

der Uebergang von:

$$
(r u'^{(1)}), \ldots, (r u'^{(n)}) \text{ in } \left(r u'^{(1)} + \left| \begin{matrix} \frac{\gamma'^{(1)}}{r} \\ \frac{\delta'^{(1)}}{r} \end{matrix} \right| \right), \ldots, \left(r u'^{(n)} + \left| \begin{matrix} \frac{\gamma'^{(n)}}{r} \\ \frac{\delta'^{(n)}}{r} \end{matrix} \right| \right),
$$

und man erhält, wenn man in der Gleichung (7) die Argumente (ru), (ru') in dieser Weise ändert, dann linke wie rechte Seite mit Hülfe der Formel (A) des Art. 1. transformirt und die dabei auftretenden Exponentialgrössen in ähnlicher Weise vereinigt, wie es früher bei Herstellung der Formel (5) geschehen, auch noch an Stelle von NC den dafür gefundenen Werth $(r^n s)^p$ setzt, schliesslich die gewünschte allgemeinere Thetaformel in der Gestalt:

$$
\begin{aligned}
(10) \quad (r^n s)^p \; & \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\bar{\varrho}^{(1)} + \gamma'^{(1)}}{r} \\ \frac{\bar{\sigma}^{(1)} + \delta'^{(1)}}{r} \end{bmatrix} (\!(r u'^{(1)})\!) \ldots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\bar{\varrho}^{(n)} + \gamma'^{(n)}}{r} \\ \frac{\bar{\sigma}^{(n)} + \delta'^{(n)}}{r} \end{bmatrix} (\!(r u'^{(n)})\!) \; e^{-\frac{2\pi i}{r^2} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=n} \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \bar{\sigma}_\nu^{(\mu)} \gamma'^{(\mu)}_\nu} \\
= \sum_{\alpha, \beta}^{0, 1, \ldots, r-1} & \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(1)} + \gamma^{(1)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(1)} + \delta^{(1)}}{r} \end{bmatrix} (\!(r u^{(1)})\!) \ldots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(n)} + \gamma^{(n)}}{r} \\ \frac{\bar{\beta}^{(n)} + \delta^{(n)}}{r} \end{bmatrix} (\!(r u^{(n)})\!) \; e^{-\frac{2\pi i}{r^2} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=n} \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \bar{\beta}_\nu^{(\mu)} \gamma_\nu^{(\mu)}} \\
& \times e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=n} \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \left(\bar{\alpha}_\nu^{(\mu)} \sigma_\nu^{(\mu)} - \bar{\beta}_\nu^{(\mu)} \varrho_\nu^{(\mu)} \right)}.
\end{aligned}
$$

Diese Formel umfasst, wie unmittelbar klar, die Formeln (6) und (7) als specielle Fälle; auch erkennt man leicht, dass dieselbe nichts von ihrer Allgemeinheit verliert, wenn man sämmtliche Grössen ϱ, σ der Null gleich setzt oder bei beliebig gelassenen Werthen der ϱ, σ für die Grössen γ, δ nur Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$ zulässt.

Um ein Beispiel für die Anwendung der gewonnenen Formeln zu geben, soll im Folgenden aus der Gleichung (9) die *Riemann*'sche Thetaformel abgeleitet werden.

Zu dem Ende gehe man von dem, den aufgestellten Bedingungen genügenden, Gleichungensysteme:

$$\begin{aligned}
x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} &= 2x'^{(1)},\\
x^{(1)} + x^{(2)} - x^{(3)} - x^{(4)} &= 2x'^{(2)},\\
x^{(1)} - x^{(2)} + x^{(3)} - x^{(4)} &= 2x'^{(3)},\\
x^{(1)} - x^{(2)} - x^{(3)} + x^{(4)} &= 2x'^{(4)},
\end{aligned}$$

aus, für welches $n = 4$, $r = 2$ ist. Die Grössen u sind dann mit den Grössen u' verknüpft durch die für $\nu = 1, 2, \ldots, p$ geltenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
u_\nu^{(1)} + u_\nu^{(2)} + u_\nu^{(3)} + u_\nu^{(4)} &= 2u_\nu'^{(1)}, & u_\nu'^{(1)} + u_\nu'^{(2)} + u_\nu'^{(3)} + u_\nu'^{(4)} &= 2u_\nu^{(1)},\\
u_\nu^{(1)} + u_\nu^{(2)} - u_\nu^{(3)} - u_\nu^{(4)} &= 2u_\nu'^{(2)}, & u_\nu'^{(1)} + u_\nu'^{(2)} - u_\nu'^{(3)} - u_\nu'^{(4)} &= 2u_\nu^{(2)},\\
u_\nu^{(1)} - u_\nu^{(2)} + u_\nu^{(3)} - u_\nu^{(4)} &= 2u_\nu'^{(3)}, & u_\nu'^{(1)} - u_\nu'^{(2)} + u_\nu'^{(3)} - u_\nu'^{(4)} &= 2u_\nu^{(3)},\\
u_\nu^{(1)} - u_\nu^{(2)} - u_\nu^{(3)} + u_\nu^{(4)} &= 2u_\nu'^{(4)}, & u_\nu'^{(1)} - u_\nu'^{(2)} - u_\nu'^{(3)} + u_\nu'^{(4)} &= 2u_\nu^{(4)}.
\end{aligned}$$

Das hierher gehörige Congruenzensystem hat die Form:

$$\begin{aligned}
x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} &\equiv 0 \pmod{2},\\
x^{(1)} + x^{(2)} - x^{(3)} - x^{(4)} &\equiv 0 \pmod{2},\\
x^{(1)} - x^{(2)} + x^{(3)} - x^{(4)} &\equiv 0 \pmod{2},\\
x^{(1)} - x^{(2)} - x^{(3)} + x^{(4)} &\equiv 0 \pmod{2},
\end{aligned}$$

und besitzt die acht nach dem Modul 2 incongruenten Lösungen:

$$\begin{aligned}
(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = {} & (0, 0, 0, 0),\ (0, 0, 1, 1),\ (0, 1, 0, 1),\ (0, 1, 1, 0),\\
& (1, 0, 0, 1),\ (1, 0, 1, 0),\ (1, 1, 0, 0),\ (1, 1, 1, 1),
\end{aligned}$$

so dass also $s = 8$ ist.

Die Grössen $\bar\alpha$, $\bar\beta$ endlich sind in diesem Falle mit den, nur die Werthe 0, 1 annehmenden, Grössen α, β durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_\nu^{(1)} + \alpha_\nu^{(2)} + \alpha_\nu^{(3)} + \alpha_\nu^{(4)} &= \bar\alpha_\nu^{(1)}, & \beta_\nu^{(1)} + \beta_\nu^{(2)} + \beta_\nu^{(3)} + \beta_\nu^{(4)} &= \bar\beta_\nu^{(1)},\\
\alpha_\nu^{(1)} + \alpha_\nu^{(2)} - \alpha_\nu^{(3)} - \alpha_\nu^{(4)} &= \bar\alpha_\nu^{(2)}, & \beta_\nu^{(1)} + \beta_\nu^{(2)} - \beta_\nu^{(3)} - \beta_\nu^{(4)} &= \bar\beta_\nu^{(2)},\\
\alpha_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(2)} + \alpha_\nu^{(3)} - \alpha_\nu^{(4)} &= \bar\alpha_\nu^{(3)}, & \beta_\nu^{(1)} - \beta_\nu^{(2)} + \beta_\nu^{(3)} - \beta_\nu^{(4)} &= \bar\beta_\nu^{(3)},\\
\alpha_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(2)} - \alpha_\nu^{(3)} + \alpha_\nu^{(4)} &= \bar\alpha_\nu^{(4)}, & \beta_\nu^{(1)} - \beta_\nu^{(2)} - \beta_\nu^{(3)} + \beta_\nu^{(4)} &= \bar\beta_\nu^{(4)}.
\end{aligned}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, p$, verknüpft.

Bildet man jetzt aus der Gleichung (9), indem man darin $n = 4$, $r = 2$, $s = 8$ setzt, die dem vorliegenden Falle entsprechende specielle Formel und lässt mit Rücksicht auf die darin vorkommende Summation an Stelle des Systems der vier Grössen $\alpha_\nu^{(1)}, \alpha_\nu^{(2)}, \alpha_\nu^{(3)}, \alpha_\nu^{(4)}$, oder an Stelle des Systems der vier Grössen $\beta_\nu^{(1)}, \beta_\nu^{(2)}, \beta_\nu^{(3)}, \beta_\nu^{(4)}$, der Reihe nach die sechzehn möglichen Variationen der Elemente 0, 1 zur vierten Classe mit Wiederholung treten, so treten, wie ein Blick auf die letzten Gleichungen zeigt, an Stelle des Systems der vier Grössen $\bar{\alpha}_\nu^{(1)}, \bar{\alpha}_\nu^{(2)}, \bar{\alpha}_\nu^{(3)}, \bar{\alpha}_\nu^{(4)}$, beziehlich $\bar{\beta}_\nu^{(1)}, \bar{\beta}_\nu^{(2)}, \bar{\beta}_\nu^{(3)}, \bar{\beta}_\nu^{(4)}$, der Reihe nach sechzehn Systeme von je vier entweder gleichzeitig geraden oder gleichzeitig ungeraden Zahlen. Durch directe Betrachtung dieser sechzehn Systeme findet man dann weiter, dass ein jedes derselben, sobald man es an Stelle des Systems $\bar{\alpha}_\nu^{(1)}, \bar{\alpha}_\nu^{(2)}, \bar{\alpha}_\nu^{(3)}, \bar{\alpha}_\nu^{(4)}$, oder an Stelle des Systems $\bar{\beta}_\nu^{(1)}, \bar{\beta}_\nu^{(2)}, \bar{\beta}_\nu^{(3)}, \bar{\beta}_\nu^{(4)}$, in die Charakteristiken des ϑ-Productes, welches auf der rechten Seite der aus (9) durch Specialisirung gewonnenen Formel steht, einführt, mit Hülfe der Formeln (B) des Art. 1., immer, und zwar ohne dass das ϑ-Product einen Factor ausscheidet, entweder auf das System 0, 0, 0, 0 oder auf das System 1, 1, 1, 1 reducirt werden kann, auch dass ein jedes dieser beiden Systeme durch die Reduction der ursprünglichen sechzehn gleich oft, nämlich achtmal, erzeugt wird. Man kann daher in der erwähnten Formel, für jedes ν von 1 bis p:

$$\bar{\alpha}_\nu^{(1)}, \bar{\alpha}_\nu^{(2)}, \bar{\alpha}_\nu^{(3)}, \bar{\alpha}_\nu^{(4)} \quad \text{durch} \quad \varepsilon_\nu, \; \varepsilon_\nu, \; \varepsilon_\nu, \; \varepsilon_\nu,$$

$$\bar{\beta}_\nu^{(1)}, \bar{\beta}_\nu^{(2)}, \bar{\beta}_\nu^{(3)}, \bar{\beta}_\nu^{(4)} \quad \text{durch} \quad \varepsilon'_\nu, \; \varepsilon'_\nu, \; \varepsilon'_\nu, \; \varepsilon'_\nu$$

ersetzen und in Bezug auf jede der Grössen ε_ν, ε'_ν über die Werthe 0 und 1 summiren, muss dann aber für jede solche Ersetzung von vier Grössen $\bar{\alpha}$ oder $\bar{\beta}$ durch ein ε oder ein ε' beziehlich den Factor 8, im Ganzen also den Factor 8^{2p} hinzufügen. Dividirt man dann noch linke und rechte Seite der entstandenen Gleichung durch 8^{2p}, so erhält man schliesslich die Formel:

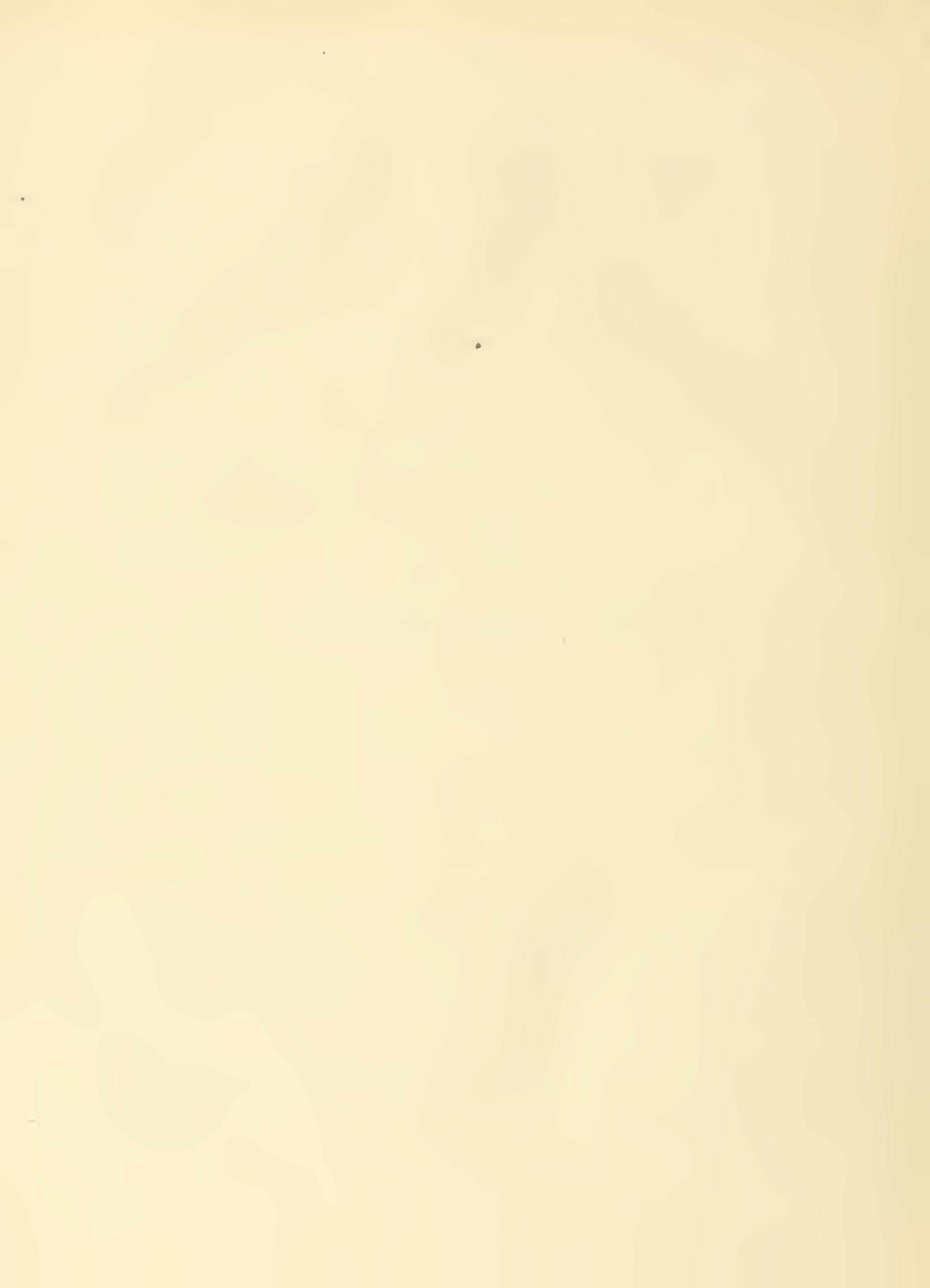
$$2^p\, \vartheta((2u'^{(1)}))\, \vartheta((2u'^{(2)}))\, \vartheta((2u'^{(3)}))\, \vartheta((2u'^{(4)}))$$
$$= \sum_{\substack{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_p}}^{0,1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{\varepsilon'}{2} \end{bmatrix}((2u^{(1)}))\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{\varepsilon'}{2} \end{bmatrix}((2u^{(2)}))\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{\varepsilon'}{2} \end{bmatrix}((2u^{(3)}))\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{\varepsilon'}{2} \end{bmatrix}((2u^{(4)})),$$

die abgesehen von der Bezeichnung der Variablen mit der *Riemann*'schen Thetaformel identisch ist, da nach der für diese zweite Arbeit gewählten Bezeichnung die hier auftretenden Charakteristiken in Verbindung mit dem Zeichen ϑ genau dasselbe bedeuten, wie die in der ersten Arbeit ausschliesslich angewandten *Riemann*'schen, die aus ihnen durch Unterdrückung der Nennerzahl 2 bei jedem Charakteristikenelemente entstehen.

Ebenso leicht kann man aus der Formel (10) die allgemeinste dem behandelten speciellen Falle entsprechende Formel erhalten und von ihr zeigen, dass sie bei passender Wahl der Bezeichnung mit der Formel (12′) der vorhergehenden Arbeit identisch ist.

III.

Beweis einiger Charakteristikensätze.



Die 2^{2p} Zahlencomplexe, welche aus dem Symbole:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \varepsilon'_2 & \cdots & \varepsilon'_p \end{bmatrix}$$

hervorgehen, wenn man darin an Stelle des Systems der $2p$ Buchstaben $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_p$ der Reihe nach die 2^{2p} Variationen der Elemente 0, 1 zur $2p^{\text{ten}}$ Klasse mit Wiederholung treten lässt, sollen die zur Zahl p gehörigen Charakteristiken genannt werden. Als allgemeines Zeichen für eine derselben kann das obige Symbol dienen, welches, wenn dadurch kein Missverständniss zu befürchten, abgekürzt mit $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}$ oder noch einfacher mit $[\varepsilon]$ bezeichnet werden soll; weitere der 2^{2p} Charakteristiken können dann durch Zeichen fixirt werden, die aus dem obigen dadurch entstehen, dass man an Stelle von ε irgend welche andere Buchstaben des griechischen Alphabets treten lässt. Unter der Summe oder Differenz $[\zeta] \pm [\eta]$ zweier Charakteristiken $[\zeta]$ und $[\eta]$ soll diejenige Charakteristik $[\varepsilon] = [\zeta] + [\eta] = [\zeta] - [\eta]$ verstanden werden, bei welcher die Elemente $\varepsilon_\nu, \varepsilon'_\nu$, für $\nu = 1, 2, \ldots, p$, durch die Congruenzen $\varepsilon_\nu \equiv \zeta_\nu + \eta_\nu$, $\varepsilon'_\nu \equiv \zeta'_\nu + \eta'_\nu$ (mod. 2) oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch die Congruenzen $\varepsilon_\nu \equiv \zeta_\nu - \eta_\nu$, $\varepsilon'_\nu \equiv \zeta'_\nu - \eta'_\nu$ (mod. 2) bestimmt sind. Umgekehrt soll von einer Charakteristik $[\varepsilon]$ gesagt werden, dass sie in die Charakteristiken $[\zeta]$ und $[\eta]$ zerlegbar sei, wenn zwischen den drei Charakteristiken die Gleichung $[\varepsilon] = [\zeta] + [\eta]$ besteht.

Bezeichnet man mit $\begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_{p-1} \\ \delta'_1 & \delta'_2 & \cdots & \delta'_{p-1} \end{bmatrix}$, abgekürzt mit $\begin{bmatrix} \delta \\ \delta' \end{bmatrix}$ oder noch einfacher mit $[\delta]$, irgend eine zur Zahl $p-1$ gehörige Charakteristik und verschafft derselben durch Anhängen von $\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$ jedesmal eine p^{te} Vertikalreihe, so entstehen zunächst die vier verschiedenen zur Zahl p gehörigen Charakteristiken:

$$\text{I. } \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ \delta' & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{II. } \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & 1 \\ \delta' & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{III. } \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ \delta' & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{IV. } \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & 1 \\ \delta' & 1 \end{bmatrix}.$$

Setzt man dann in diesen Gleichungen für $\begin{bmatrix} \delta \\ \delta' \end{bmatrix}$ der Reihe nach alle 2^{2p-2} zur Zahl $p-1$ gehörigen Charakteristiken, so erhält man die sämmtlichen zur Zahl p gehörigen Charakteristiken, die dadurch zugleich in vier, den vier angeschriebenen Typen entsprechende Gruppen eingetheilt erscheinen, von denen jede 2^{2p-2} Charakteristiken mit gemeinsamer p^{ter} Verticalreihe enthält.

Eine Charakteristik $[\varepsilon]$ soll gerade oder ungerade genannt werden, je nachdem:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \varepsilon_\nu \varepsilon'_\nu \equiv 0 \text{ (mod. 2) oder } \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \varepsilon_\nu \varepsilon'_\nu \equiv 1 \text{ (mod. 2)}$$

ist. Bezeichnet man dann mit $\mathfrak{g}_p$ und $\mathfrak{u}_p$ die Anzahl der geraden und ungeraden unter

den 2^{2p} zur Zahl p gehörigen Charakteristiken, entsprechend mit $\mathfrak{g}_{p-1}$ und $\mathfrak{u}_{p-1}$ die Anzahl der geraden und ungeraden unter den 2^{2p-2} zur Zahl $p-1$ gehörigen Charakteristiken, und berücksichtigt, dass jede Charakteristik $[\varepsilon]$ vom Typus I, II, III gerade oder ungerade ist, je nachdem die Charakteristik $[\delta]$, aus der sie entstanden, gerade oder ungerade, dass dagegen jede Charakteristik $[\varepsilon]$ vom Typus IV bei ungerader Charakteristik $[\delta]$ gerade, bei gerader Charakteristik $[\delta]$ ungerade ist, so erkennt man sofort, dass von den vier Gruppen, in welche die zur Zahl p gehörigen Charakteristiken eingetheilt wurden, die drei ersten aus je $\mathfrak{g}_{p-1}$ geraden und je $\mathfrak{u}_{p-1}$ ungeraden Charakteristiken bestehen, während die vierte Gruppe $\mathfrak{u}_{p-1}$ gerade und $\mathfrak{g}_{p-1}$ ungerade Charakteristiken enthält. Man hat daher die Beziehungen:

$$\mathfrak{g}_p = 3\mathfrak{g}_{p-1} + \mathfrak{u}_{p-1}, \qquad \mathfrak{g}_p + \mathfrak{u}_p = 4(\mathfrak{g}_{p-1} + \mathfrak{u}_{p-1}),$$
$$\mathfrak{u}_p = 3\mathfrak{u}_{p-1} + \mathfrak{g}_{p-1}, \qquad \mathfrak{g}_p - \mathfrak{u}_p = 2(\mathfrak{g}_{p-1} - \mathfrak{u}_{p-1}),$$

aus denen durch Uebergang von p zu $p-1$, $p-2, \ldots, 2, 1$ und unter Berücksichtigung von $\mathfrak{g}_1 = 3$, $\mathfrak{u}_1 = 1$ die Gleichungen:

$$\mathfrak{g}_p + \mathfrak{u}_p = 4^{p-1}(\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{u}_1) = 4^p, \qquad \mathfrak{g}_p = 2^{p-1}(2^p + 1),$$
$$\mathfrak{g}_p - \mathfrak{u}_p = 2^{p-1}(\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{u}_1) = 2^p, \qquad \mathfrak{u}_p = 2^{p-1}(2^p - 1),$$

folgen. Man hat so den

Satz I. *Von den 2^{2p} zur Zahl p gehörigen Charakteristiken sind $\mathfrak{g}_p = 2^{p-1}(2^p+1)$ gerade, $\mathfrak{u}_p = 2^{p-1}(2^p-1)$ ungerade.*

Eine beliebige zur Zahl p gehörige Charakteristik $[\varepsilon]$ (die Charakteristik $[0] = \left[\begin{smallmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{smallmatrix}\right]$ ausgeschlossen) lässt sich auf 2^{2p-1} Weisen in zwei, immer verschiedene, Charakteristiken zerlegen. Man kann nämlich in der Gleichung $[\varepsilon] = [\zeta] + [\eta]$ bei gegebener Charakteristik $[\varepsilon]$ immer noch $[\zeta]$ ganz nach Belieben annehmen; dann erst ist der zweite Summand $[\eta]$, durch die Gleichung $[\eta] = [\varepsilon] - [\zeta]$, und damit auch die Zerlegung selbst bestimmt. Setzt man nun für $[\zeta]$ der Reihe nach die sämmtlichen 2^{2p} zur Zahl p gehörigen Charakteristiken, so erhält man 2^{2p} Zerlegungen der Charakteristik $[\varepsilon]$, unter denen aber, da zu einer Zerlegung $[\varepsilon] = [\alpha] + [\beta]$ immer auch die damit identische $[\varepsilon] = [\beta] + [\alpha]$ sich findet, jede mögliche Zerlegung zweimal vorkommt, so dass im Ganzen nur 2^{2p-1} verschiedene Zerlegungen von $[\varepsilon]$ existiren. Man hat somit den

Satz II. *Jede zur Zahl p gehörige, von $[0]$ verschiedene Charakteristik lässt sich auf 2^{2p-1} Weisen in zwei, immer verschiedene, Charakteristiken zerlegen.*

Was die bei der vorhergehenden Betrachtung ausgeschlossene Charakteristik $[0]$ betrifft, so lässt sich dieselbe, entsprechend der Gleichung $[0] = [\zeta] + [\zeta]$, auf 2^{2p} Weisen in zwei, immer gleiche, Charakteristiken zerlegen.

Die sämmtlichen 2^{2p-1} Zerlegungen, $[\varepsilon] = [\zeta] + [\eta]$, einer gegebenen, von $[0]$ verschiedenen Charakteristik $[\varepsilon]$ kann man nun, wie folgt, in drei Arten eintheilen. Zur ersten Art rechne man alle diejenigen Zerlegungen, bei denen $[\zeta]$ und $[\eta]$ beide gerade sind, ihre Anzahl sei $\mathfrak{x}_p$; zur zweiten Art alle diejenigen, bei denen $[\zeta]$ und $[\eta]$ beide ungerade sind, ihre Anzahl betrage $\mathfrak{y}_p$; zur dritten Art endlich diejenigen, bei denen von den beiden Charakteristiken $[\zeta]$, $[\eta]$ die eine gerade, die andere ungerade ist, ihre Anzahl sei $\mathfrak{z}_p$. Die Zahlen $\mathfrak{x}_p$, $\mathfrak{y}_p$, $\mathfrak{z}_p$ sollen jetzt bestimmt werden; es wird sich dabei

zeigen, dass dieselben von der besonderen Charakteristik $[\varepsilon]$, auf die sie sich beziehen, unabhängig sind, also nur von der Zahl p abhängen.

Setzt man in der Gleichung $[\varepsilon] = [\zeta] + [\eta]$ bei gegebener Charakteristik $[\varepsilon]$ für $[\zeta]$ der Reihe nach die $\mathfrak{g}_p$ geraden Charakteristiken und bestimmt jedesmal $[\eta]$ aus der Gleichung $[\eta] = [\varepsilon] - [\zeta]$, so erhält man von den Zerlegungen der Charakteristik $[\varepsilon]$ jede Zerlegung der ersten Art zweimal, jede Zerlegung der dritten Art einmal; setzt man dagegen für $[\zeta]$ der Reihe nach die $\mathfrak{u}_p$ ungeraden Charakteristiken, so erhält man auf dieselbe Weise jede Zerlegung der zweiten Art zweimal, jede Zerlegung der dritten Art einmal. Hieraus ergeben sich die Beziehungen:

$$(1) \quad \mathfrak{g}_p = 2\mathfrak{x}_p + \mathfrak{z}_p, \qquad\qquad (2) \quad \mathfrak{u}_p = 2\mathfrak{y}_p + \mathfrak{z}_p.$$

Man bilde nun aus den Elementen der beiden Charakteristiken $[\zeta]$, $[\eta]$, die einer beliebigen Zerlegung $[\varepsilon] = [\zeta] + [\eta]$ der gegebenen Charakteristik $[\varepsilon]$ entsprechen, den Ausdruck:

$$(-1)^{\sum\limits_1^p \zeta_\nu \zeta'_\nu} \cdot (-1)^{\sum\limits_1^p \eta_\nu \eta'_\nu}$$

und bezeichne denselben, insofern als, bei gegebener Charakteristik $[\varepsilon]$, $[\eta]$ mit $[\zeta]$ zugleich bestimmt ist, mit $f[\zeta]$. Es besitzt dann $f[\zeta]$ den Werth $+1$, wenn die betrachtete Zerlegung von der ersten oder zweiten Art, dagegen den Werth -1, wenn dieselbe von der dritten Art ist. Lässt man jetzt an Stelle von $[\zeta]$ der Reihe nach die sämmtlichen 2^{2p} Charakteristiken treten und bildet die Summe s der entsprechenden Werthe $+1$ von $f[\zeta]$, so ergibt sich:

$$s = 2(\mathfrak{x}_p + \mathfrak{y}_p - \mathfrak{z}_p),$$

da jede mögliche Zerlegung der Charakteristik $[\varepsilon]$ zweimal auftritt, wenn $[\zeta]$ in der Gleichung $[\varepsilon] = [\zeta] + [\eta]$ der Reihe nach alle 2^{2p} Charakteristiken durchläuft. Berücksichtigt man aber, dass der mit $f[\zeta]$ bezeichnete Ausdruck, weil $[\eta] = [\varepsilon] - [\zeta] = [\varepsilon] + [\zeta]$ ist, auch in die Form:

$$f[\zeta] = (-1)^{\sum\limits_1^p \zeta_\nu \zeta'_\nu} \cdot (-1)^{\sum\limits_1^p (\varepsilon_\nu + \zeta_\nu)(\varepsilon'_\nu + \zeta'_\nu)} = (-1)^{\sum\limits_1^p \varepsilon_\nu \varepsilon'_\nu} \cdot (-1)^{\sum\limits_1^p (\varepsilon_\nu \zeta'_\nu + \varepsilon'_\nu \zeta_\nu)}$$

gebracht werden kann, und dass, wie in der ersten Arbeit (pag. 18, 19) gezeigt wurde:

$$\sum_{[\zeta]} (-1)^{\sum\limits_1^p (\varepsilon_\nu \zeta'_\nu + \varepsilon'_\nu \zeta_\nu)} = 0$$

ist, wenn $[\varepsilon]$, wie es hier der Fall, eine feste, von $[0]$ verschiedene Charakteristik bezeichnet, und $[\zeta]$ bei der Summation sämmtliche 2^{2p} Charakteristiken durchläuft, so erhält man für s die weitere Gleichung:

$$s = \sum_{[\zeta]} f[\zeta] = (-1)^{\sum\limits_1^p \varepsilon_\nu \varepsilon'_\nu} \cdot \sum_{[\zeta]} (-1)^{\sum\limits_1^p (\varepsilon_\nu \zeta'_\nu + \varepsilon'_\nu \zeta_\nu)} = 0.$$

Setzt man jetzt die beiden für s gefundenen Werthe einander gleich, so entsteht die Relation:

$$(3) \quad 0 = \mathfrak{x}_p + \mathfrak{y}_p - \mathfrak{z}_p.$$

Durch Combination der Gleichungen (1), (2), (3) ergibt sich aber:

$$3\mathfrak{x}_p + \mathfrak{y}_p = \mathfrak{g}_p = 3\mathfrak{g}_{p-1} + \mathfrak{u}_{p-1}\,,$$
$$3\mathfrak{y}_p + \mathfrak{x}_p = \mathfrak{u}_p = 3\mathfrak{u}_{p-1} + \mathfrak{g}_{p-1}\,, \qquad \mathfrak{z}_p = \mathfrak{x}_p + \mathfrak{y}_p\,,$$

und daher endlich:

$$\mathfrak{x}_p = \mathfrak{g}_{p-1} = 2^{p-2}(2^{p-1} + 1)\,,$$
$$\mathfrak{y}_p = \mathfrak{u}_{p-1} = 2^{p-2}(2^{p-1} - 1)\,, \qquad \mathfrak{z}_p = \mathfrak{g}_{p-1} + \mathfrak{u}_{p-1} = 2^{2p-2}\,.$$

Diesen Resultaten entspricht der

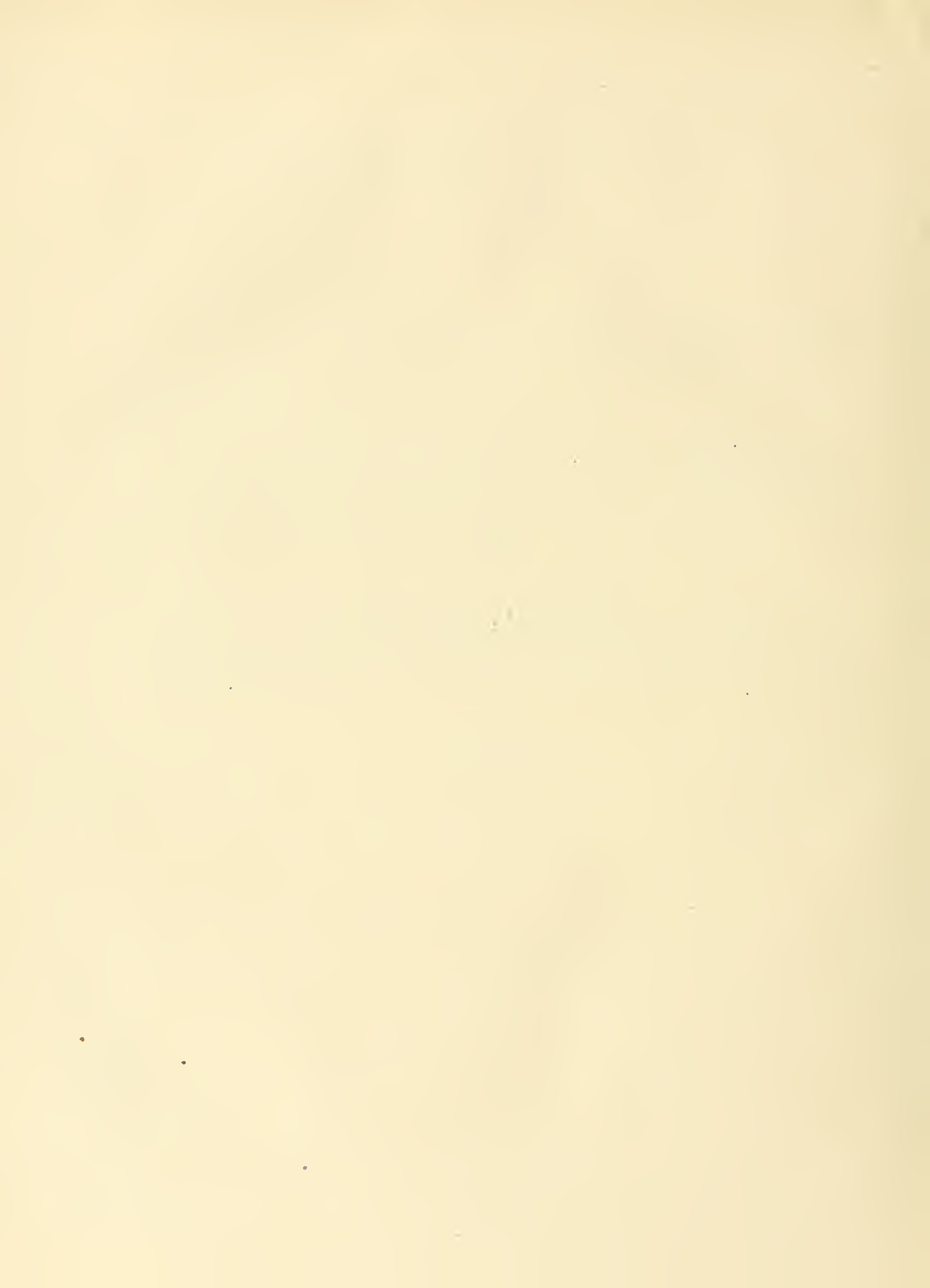
Satz III. *Jede zur Zahl p gehörige, von [0] verschiedene Charakteristik lässt sich auf* $\mathfrak{g}_{p-1} = 2^{p-2}(2^{p-1} + 1)$ *Weisen in zwei gerade, auf* $\mathfrak{u}_{p-1} = 2^{p-2}(2^{p-1} - 1)$ *Weisen in zwei ungerade, endlich auf* $\mathfrak{g}_{p-1} + \mathfrak{u}_{p-1} = 2^{2p-2}$ *Weisen in eine gerade und eine ungerade Charakteristik zerlegen.*

Dieselben Resultate lassen sich auch wiedergeben durch den

Satz IV. *Addirt man zu den sämmtlichen* 2^{2p} *zur Zahl p gehörigen Charakteristiken eine beliebige derselben, die Charakteristik [0] ausgeschlossen, so gehen dadurch von den* $2^{p-1}(2^p + 1)$ *geraden Charakteristiken* $2^{p-1}(2^{p-1} + 1)$ *wieder in gerade, die übrigen* 2^{2p-2} *in ungerade über, während andererseits von den* $2^{p-1}(2^p - 1)$ *ungeraden Charakteristiken* $2^{p-1}(2^{p-1} - 1)$ *wieder in ungerade, die übrigen* 2^{2p-2} *in gerade übergehen.*

IV.

Verallgemeinerung der Riemann'schen Charakteristikentheorie.



1.

Gegeben sei eine zweiblättrige, im Unendlichen geschlossene *Riemann*'sche Fläche T mit den $2p+2$ Verzweigungspunkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p+2}$. Diese, die Verzweigung der Function:

$$s = \sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+2})}$$

darstellende, $2p+1$-fach zusammenhangende Fläche zerlege man auf irgend eine Weise durch p Querschnittpaare $a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_p, b_p$ und $p-1$ Hülfslinien $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$, von denen allgemein die Linie c_ν einen Punkt der Linie b_ν mit einem Punkte der Linie $a_{\nu+1}$ verbindet, in eine einfach zusammenhangende Fläche T'.

Man bilde ferner aus dem allgemeinen Ausdrucke für ein allenthalben endliches Integral u, von der Form:

$$u = \int\limits_{z_0, s_0}^{z, s} \frac{(c_0 + c_1 z + \cdots + c_{p-1} z^{p-1})\,dz}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+2})}},$$

indem man die in ihm enthaltenen willkürlichen Constanten c jedesmal passend bestimmt und den Integrationsweg auf die Fläche T' beschränkt, dieser Beschränkung auch durch eine besondere Form des Integralzeichens Ausdruck verleiht, der Reihe nach die p *Riemann*'schen Normalintegrale:

$$u_1 = \int\limits_{z_0, s_0}^{z, s} du_1 \quad , \quad u_2 = \int\limits_{z_0, s_0}^{z, s} du_2 \quad , \quad \ldots\ldots \quad , \quad u_p = \int\limits_{z_0, s_0}^{z, s} du_p,$$

welche dadurch charakterisirt sind, dass allgemein der Periodicitätsmodul von u_ν am Querschnitte a_ν den Werth πi besitzt, die Periodicitätsmodulen von u_ν an allen übrigen Querschnitten a den Werth 0 haben. In Folge dieser Bedingungen sind auch die Periodicitätsmodulen der Functionen u an den p Querschnitten b vollständig bestimmt, und es besteht, wenn allgemein der Periodicitätsmodul von u_ϱ am Querschnitte b_σ mit $a_{\varrho\sigma}$ bezeichnet wird, für jedes μ und ν von 1 bis p die Relation $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$.

Wie bekannt, lassen sich im vorliegenden Falle die Periodicitätsmodulen eines allenthalben endlichen Integrales u mit Hülfe von Coefficienten, die ausschliesslich gerade Zahlen sind, linear ausdrücken durch die $2p+1$ bestimmten Integrale, welche man erhält, wenn man das Integral $\int du$ zwischen je zwei auf einander folgenden Verzweigungspunkten erstreckt. Entsprechend drückt sich der Werth des zwischen irgend zwei Verzweigungspunkten erstreckten Integrales $\int du$ mit Hülfe von ganzzahligen Coefficienten linear durch die Halben seiner Periodicitätsmodulen aus.

Führt man daher in das System $u_1 \mid u_2 \mid \ldots \mid u_p$ der p Normalintegrale, welches in der Folge zur Abkürzung mit $\int\limits_{z_0, s_0}^{z, s}(du)$ bezeichnet werden soll, an Stelle der unteren Grenze z_0, s_0 irgend einen Verzweigungspunkt, z. B. α_{2p+2}, ein und lässt in dem so bestimmten Integralsysteme an Stelle von z, s der Reihe nach die $2p+2$ Verzweigungspunkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p+2}$ treten, so geht dasselbe jedesmal in ein System correspondirender Halber seiner Periodicitätsmodulen über, wenn man unter letzterem ein System von der Form:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{g_\mu}{2} a_{1\mu} + \frac{g'_1}{2}\pi i \;\Big|\; \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{g_\mu}{2} a_{2\mu} + \frac{g'_2}{2}\pi i \;\Big|\; \ldots\ldots \;\Big|\; \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{g_\mu}{2} a_{p\mu} + \frac{g'_p}{2}\pi i$$

versteht, wobei die g, g' irgend welche ganze Zahlen bedeuten. Bezeichnet man das angeschriebene System correspondirender Halber der Periodicitätsmodulen symbolisch durch den Complex:

$$\begin{pmatrix} g_1\, g_2 \ldots g_p \\ g'_1\, g'_2 \ldots g'_p \end{pmatrix}$$

der dasselbe bestimmenden ganzen Zahlen g, g', so lassen sich entsprechend die $2p+2$ Systeme correspondirender Halber der Periodicitätsmodulen, in welche ein Integralsystem $\int\limits_{z_0, s_0}^{z, s}(du)$, dessen untere Grenze z_0, s_0 ein Verzweigungspunkt ist, übergeht, wenn man für z, s der Reihe nach die $2p+2$ Verzweigungspunkte einführt, durch solche Zahlencomplexe fixiren. In diesem Sinne mögen den $2p+2$ Integralsystemen:

$$\int\limits_{\alpha_{2p+2}}^{\alpha_1}(du), \qquad \int\limits_{\alpha_{2p+2}}^{\alpha_2}(du), \qquad \ldots\ldots, \qquad \int\limits_{\alpha_{2p+2}}^{\alpha_{2p+1}}(du), \qquad \int\limits_{\alpha_{2p+2}}^{\alpha_{2p+2}}(du)$$

beziehlich die $2p+2$ Zahlencomplexe:

$$\begin{pmatrix} g_{1,1} \ldots g_{p,1} \\ g'_{1,1} \ldots g'_{p,1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} g_{1,2} \ldots g_{p,2} \\ g'_{1,2} \ldots g'_{p,2} \end{pmatrix}, \quad \ldots\ldots, \quad \begin{pmatrix} g_{1,2p+1} \ldots g_{p,2p+1} \\ g'_{1,2p+1} \ldots g'_{p,2p+1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 \end{pmatrix}$$

entsprechen.

Aus jedem der erhaltenen Zahlencomplexe denke man sich nun einen neuen dadurch abgeleitet, dass man die $2p$ in ihm vorkommenden Zahlen durch ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul 2 ersetzt. Die dadurch entstehenden speciellen Zahlencomplexe, welche also nur die Zahlen 0, 1 enthalten, mögen durch:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{1,1} \ldots \gamma_{p,1} \\ \gamma'_{1,1} \ldots \gamma'_{p,1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \gamma_{1,2} \ldots \gamma_{p,2} \\ \gamma'_{1,2} \ldots \gamma'_{p,2} \end{bmatrix}, \quad \ldots\ldots, \quad \begin{bmatrix} \gamma_{1,2p+1} \ldots \gamma_{p,2p+1} \\ \gamma'_{1,2p+1} \ldots \gamma'_{p,2p+1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 \end{bmatrix}$$

bezeichnet werden. Zahlencomplexe von dieser Art sollen **Charakteristiken** genannt werden. Man erhält sämmtliche Charakteristiken, 2^{2p} an der Zahl, wenn man in dem Symbole $\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_p \end{bmatrix}$ an Stelle des Systems der $2p$ Buchstaben $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_p$ der Reihe nach die 2^{2p} Variationen der Elemente 0, 1 zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt.

Das soeben gewonnene System von $2p+2$ Charakteristiken ist vollständig bestimmt, sobald die Fläche T' oder, was dasselbe, die zur Fläche T' führende Zerlegung der Fläche T gegeben ist, und kann sich, so lange der Verzweigungspunkt α_{2p+2} als untere Grenze beibehalten wird, nur ändern, wenn man von einer Zerlegung der Fläche T zu einer andern übergeht. In diesem Sinne kann das obige System von $2p+2$ Charakteristiken als das der gewählten Zerlegung entsprechende bezeichnet werden; zugleich aber kann dasselbe, da für diese Zerlegung keine besonderen Voraussetzungen gemacht wurden, als der allgemeine Repräsentant solcher Systeme betrachtet werden. Seine merkwürdigen Eigenschaften zu untersuchen, ist die Aufgabe der folgenden Artikel.

2.

Für das Folgende empfiehlt es sich, einige allgemein im Gebrauche stehende, auf Charakteristiken bezügliche Definitionen vorauszuschicken. Zu dem Ende möge eine beliebige Charakteristik abgekürzt durch $[\varepsilon]$ bezeichnet werden, und weiter sollen verschiedene Charakteristiken in der Weise fixirt werden, dass man entweder verschiedene Buchstaben oder denselben Buchstaben mit verschiedenen Indices an Stelle von ε in die Charakteristikenklammer setzt.

Eine Charakteristik $[\varepsilon]$ soll **gerade** oder **ungerade** genannt werden, je nachdem $\sum_1^p \varepsilon_\nu \varepsilon'_\nu \equiv 0$ (mod. 2) oder $\sum_1^p \varepsilon_\nu \varepsilon'_\nu \equiv 1$ (mod. 2) ist. Unter der **Summe**, $[\zeta]+[\eta]$, zweier Charakteristiken $[\zeta]$ und $[\eta]$ soll diejenige Charakteristik $[\varepsilon]=[\zeta]+[\eta]$ verstanden werden, deren Elemente ε_ν, ε'_ν für $\nu=1,2,\ldots,p$ durch die Congruenzen $\varepsilon_\nu \equiv \zeta_\nu+\eta_\nu$, $\varepsilon'_\nu \equiv \zeta'_\nu+\eta'_\nu$ (mod. 2) bestimmt sind. Bezeichnen endlich $[\varepsilon_1], [\varepsilon_2], \ldots, [\varepsilon_m]$ m von $[0]$ verschiedene Charakteristiken, und ist die Summe irgend einer Anzahl derselben oder auch aller der Charakteristik $[0]$ gleich, so soll gesagt werden, es bestehe zwischen den Charakteristiken $[\varepsilon]$ eine **lineare Relation**. Ist dagegen keine der Summen, die man aus den Charakteristiken $[\varepsilon]$ als Summanden bilden kann, der Charakteristik $[0]$ gleich, so sollen die m Charakteristiken **linearunabhängig** genannt werden.

Man gehe jetzt auf die $2p+2$ im vorigen Artikel aufgestellten, einer beliebigen Zerlegung der Fläche T entsprechenden Charakteristiken zurück und bezeichne dieselben zur Abkürzung mit:

$$[a_1],\ [a_2],\ \ldots\ldots,\ [a_{2p+1}],\ [0].$$

Wie ich in einer früheren Arbeit*) gezeigt habe, besteht zwischen diesen $2p+1$ Charakteristiken $[a]$ nur die eine lineare Relation:

$$(L) \qquad [a_1]+[a_2]+\cdots+[a_{2p+1}]=[0],$$

so dass also je $2p$ derselben linearunabhängig sind. Bildet man daher aus den $2p+1$ Charakteristiken $[a]$ alle Summen von je $2, 3, \ldots, p$ derselben, nimmt die Charakte-

*) Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche, Art. 6 und 14. Denkschriften der schweiz. naturf. Gesellschaft, Bd. XXII, 1866. Separatabzüge in Commission bei Cäsar Schmidt, Zürich.

ristiken $[a]$ selbst sowie die Charakteristik $[0]$ noch hinzu und addirt hierauf zu den so erhaltenen:

$$1 + (2p+1)_1 + (2p+1)_2 + \cdots + (2p+1)_p = 2^{2p}$$

Charakteristiken eine beliebige Charakteristik $[k]$, so entstehen 2^{2p} Charakteristiken, von denen keine zwei einander gleich sind, und unter welchen daher jede der 2^{2p} überhaupt existirenden Charakteristiken vorkommen muss. Daraus folgt aber, dass eine beliebige Charakteristik $[\varepsilon]$ sich immer und nur auf eine Weise aus einer willkürlich wählbaren Charakteristik $[k]$ und Charakteristiken $[a]$ zusammensetzen lässt in der Form:

$$[\varepsilon] = [k] + \overset{r}{\Sigma}[a], \qquad r \gtrless p\ ,$$

wo $\overset{r}{\Sigma}[a]$ eine Summe von irgend r der Charakteristiken $[a]$ bezeichnet. Dem Falle $[\varepsilon] = [k]$ entspricht der Werth $r = 0$.

Man kann bemerken, dass gleiche Betrachtungen für je $2p + 1$ Charakteristiken, $[\varepsilon_1], [\varepsilon_2], \ldots, [\varepsilon_{2p+1}]$, gelten, zwischen denen nur die eine Relation:

$$[\varepsilon_1] + [\varepsilon_2] + \cdots + [\varepsilon_{2p+1}] = [0]$$

besteht; das vorliegende System der Charakteristiken $[a]$ ist aber weiter noch dadurch ausgezeichnet, dass zu den $2p + 1$ Charakteristiken $[a_1], [a_2], \ldots, [a_{2p+1}]$ stets eine, zunächst noch unbekannte, Charakteristik $[n]$ existirt, welche in solcher Beziehung zu den Charakteristiken $[a]$ steht, dass alle Charakteristiken, die den Formen:

$$[n] + \overset{p-4\mu}{\Sigma}[a], \quad [n] + \overset{p-4\mu-3}{\Sigma}[a], \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots\ ,$$

entsprechen, g e r a d e, alle Charakteristiken, die den Formen:

$$[n] + \overset{p-4\mu-1}{\Sigma}[a], \quad [n] + \overset{p-4\mu-2}{\Sigma}[a], \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots\ ,$$

entsprechen, u n g e r a d e sind.

Einen Beweis für die Existenz einer solchen Charakteristik $[n]$ habe ich auf Grund der Eigenschaften der zum Integralsysteme $u_1 \mid u_2 \mid \ldots \mid u_p$ gehörigen Thetafunctionen in Art. 12 meiner vorher citirten Arbeit gegeben, und ich erlaube mir hier auf die betreffende Untersuchung zu verweisen. Das soeben angeführte Resultat derselben soll jetzt etwas verallgemeinert werden.

Berücksichtigt man, dass in Folge der Relation (L) stets:

$$\overset{r}{\Sigma}[a] = \overset{2p+1-r}{\Sigma}[a]$$

ist, wenn in dieser Gleichung rechts diejenigen $2p + 1 - r$ Charakteristiken $[a]$ stehen, welche links nicht vorkommen, so ergibt sich zunächst, dass eine beliebige Charakteristik $[\varepsilon]$ auf zwei Weisen in der Form:

$$[\varepsilon] = [n] + \overset{p+m}{\Sigma}[a], \qquad -p < m \gtrless p + 1,$$

dargestellt werden kann. Hat nun, in Gemässheit des vorher angeführten Resultates, bei gerader Charakteristik $[\varepsilon]$ m für die eine Darstellung den Werth -4μ oder $-4\mu-3$, so hat es für die zweite Darstellung den Werth $4\mu + 1$ oder $4\mu + 4$; hat dagegen bei ungerader Charakteristik $[\varepsilon]$ m für die eine Darstellung den Werth $-4\mu - 1$

oder $-4\mu-2$, so hat es für die zweite Darstellung den Werth $4\mu+2$ oder $4\mu+3$. Welche der beiden möglichen Darstellungen der Charakteristik $[\varepsilon]$ also auch vorliegen mag, immer ist, wenn $[\varepsilon]$ eine gerade Charakteristik, $m \equiv 0$ oder $m \equiv 1$ (mod. 4), dagegen, wenn $[\varepsilon]$ eine ungerade Charakteristik, $m \equiv 2$ oder $m \equiv 3$ (mod. 4). Durch Zusammenfassen der gefundenen Resultate erhält man den folgenden

Satz I. *Sind $[a_1], [a_2], \ldots, [a_{2p+1}], [0]$ die $2p+2$ irgend einer Zerlegung der Fläche T in eine einfach zusammenhangende Fläche T' entsprechenden Charakteristiken, so existirt zu diesen Charakteristiken immer eine, zunächst noch unbekannte, Charakteristik $[n]$, welche zu denselben in der Beziehung steht, dass die Charakteristik:*

$$[n]+\sum^{p+m}[a], \qquad -p < m < p+1,$$

gerade ist, wenn $m \equiv 0$ oder $m \equiv 1$ (mod. 4), ungerade, wenn $m \equiv 2$ oder $m \equiv 3$ (mod. 4) ist. Lässt man in der Form $[n]+\sum^{p+m}[a]$ m alle Zahlen von $-p$ bis $p+1$ durchlaufen und wählt jedesmal die $p+m$ Charakteristiken $[a]$ auf alle möglichen Weisen aus den Charakteristiken $[a_1], [a_2], \ldots, [a_{2p+1}]$ aus, so erhält man für jede der 2^{2p} überhaupt existirenden Charakteristiken zwei verschiedene Darstellungen, von denen die eine immer diejenigen Charakteristiken $[a]$ enthält, welche in der anderen nicht vorkommen.

3.

Die Charakteristik $[n]$, von welcher im vorhergehenden Satze nur die Existenz ausgesprochen wurde, soll jetzt bestimmt werden. Zu dem Ende denke man sich $[n]$ auf eine der beiden möglichen Weisen aus Charakteristiken $[a]$ zusammengesetzt; die dazu nöthigen, noch unbekannten, Charakteristiken $[a]$ sollen mit $[a'_1], [a'_2], \ldots, [a'_r]$, die $2p+1-r$ übrigen mit $[a''_1], [a''_2], \ldots, [a''_{2p+1-r}]$ bezeichnet werden; es ist dann:

$$[n]=\sum^{r}[a'], \quad \text{oder auch} \quad [0]=[n]+\sum^{r}[a'].$$

Addirt man in der letzten Gleichung auf der linken und rechten Seite das eine Mal eine beliebige der r Charakteristiken $[a']$, z. B. $[a'_\mu]$, das andere Mal eine beliebige der $2p+1-r$ Charakteristiken $[a'']$, z. B. $[a''_\nu]$, so erhält man die Gleichungen:

$$[a'_\mu]=[n]+\sum^{r-1}[a'], \qquad [a''_\nu]=[n]+\sum^{r}[a']+[a''_\nu],$$

und erkennt daraus mit Rücksicht auf Satz I, dass die r Charakteristiken $[a']$, aber auch die $2p+1-r$ Charakteristiken $[a'']$ entweder sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade sind, und ferner, dass bei geraden $[a']$ die $[a'']$ ungerade, bei ungeraden $[a']$ die $[a'']$ gerade sind. Die Charakteristik $[n]$ muss daher entweder mit der Summe aller unter den $2p+1$ Charakteristiken $[a]$ vorkommenden geraden oder mit der Summe aller unter den $2p+1$ Charakteristiken $[a]$ vorkommenden ungeraden Charakteristiken übereinstimmen; beides kommt aber auf dasselbe hinaus, da in Folge der Relation (L) die Summe aller geraden Charakteristiken $[a]$ der Summe aller ungeraden Charakteristiken $[a]$ gleich ist.

Bezeichnet man jetzt mit s die Anzahl der unter den $2p+1$ Charakteristiken $[a_1], [a_2], \ldots, [a_{2p+1}]$ vorkommenden ungeraden Charakteristiken, mit $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$ die denselben entsprechenden Stellenzahlen, so kann nach dem soeben Gefundenen:

$$[n] = [a_{\sigma_1}] + [a_{\sigma_2}] + \cdots + [a_{\sigma_s}]$$

gesetzt werden; hieraus ergeben sich aber, indem man unter μ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, s$ versteht, unmittelbar die beiden Gleichungen:

$$[0] = [n] + [a_{\sigma_1}] + [a_{\sigma_2}] + \cdots + [a_{\sigma_s}],$$
$$[a_{\sigma_\mu}] = [n] + [a_{\sigma_1}] + \cdots + [a_{\sigma_{\mu-1}}] + [a_{\sigma_{\mu+1}}] + \cdots + [a_{\sigma_s}].$$

Mit Rücksicht auf Satz I folgt aus der ersten dieser beiden Gleichungen, dass s, als Anzahl der bei ihr auf der rechten Seite vorkommenden Charakteristiken $[a]$, weil $[0]$ eine gerade Charakteristik ist, entweder der Bedingung $s \equiv p \pmod{4}$ oder der Bedingung $s \equiv p+1 \pmod{4}$ genügen muss, während die zweite Gleichung zeigt, dass $s-1$, als Anzahl der bei ihr auf der rechten Seite vorkommenden Charakteristiken $[a]$, weil $[a_{\sigma_\mu}]$ eine ungerade Charakteristik ist, entweder die Bedingung $s-1 \equiv p+2 \pmod{4}$ oder die Bedingung $s-1 \equiv p+3 \pmod{4}$ erfüllen muss. Die so für s gefundenen Bedingungen können aber nur dann zusammen bestehen, wenn $s \equiv p \pmod{4}$ ist. Den gefundenen Resultaten entspricht der

Satz II. *Bezeichnet man bei gegebenen $[a_1], [a_2], \ldots, [a_{2p+1}]$ mit $[n]$ eine, nach Satz I stets existirende, Charakteristik von der Beschaffenheit, dass die den Formen:*

$$[n] + \overset{p+4\mu}{\Sigma}[a],\quad [n] + \overset{p+4\mu+1}{\Sigma}[a], \qquad \mu = {}^{0,\ 1,\ \ 2,\ \ldots}_{\quad -1, -2, \ldots},$$

entsprechenden Charakteristiken gerade, *die den Formen:*

$$[n] + \overset{p+4\mu+2}{\Sigma}[a],\quad [n] + \overset{p+4\mu+3}{\Sigma}[a], \qquad \mu = {}^{0,\ 1,\ \ 2,\ \ldots}_{\quad -1, -2, \ldots},$$

entsprechenden Charakteristiken ungerade *sind, so ist diese Charakteristik $[n]$ immer der Summe der unter den $2p+1$ Charakteristiken $[a]$ vorkommenden ungeraden Charakteristiken gleich. Bezeichnet man mit s die Anzahl dieser ungeraden Charakteristiken, so ist stets $s \equiv p \pmod{4}$.*

4.

Je zwei der $2p+1$ Charakteristiken $[a]$ stehen in einer merkwürdigen Beziehung zu einander. Bezeichnet man den aus den Elementen zweier beliebiger Charakteristiken $[\varepsilon]$, $[\eta]$ gebildeten Ausdruck:

$$(-1)^{\sum\limits_1^p (\varepsilon_\nu \eta'_\nu + \varepsilon'_\nu \eta_\nu)}$$

zur Abkürzung mit $(-1)^{[\varepsilon] \mid [\eta]}$, so lässt sich die erwähnte Beziehung fixiren durch den

Satz III. *Versteht man unter* $[a_\mu]$, $[a_\nu]$ *irgend zwei der* $2p+1$ *Charakteristiken* $[a_1], [a_2], \ldots, [a_{2p+1}]$, *so ist stets* $(-1)^{[a_\mu]\,|\,[a_\nu]} = -1$.

Für den Beweis dieses Satzes berücksichtige man, dass:

$$(-1)^{\sum\limits_1^p(\varepsilon_\nu\eta'_\nu+\varepsilon'_\nu\eta_\nu)} = (-1)^{\sum\limits_1^p\varepsilon_\nu\varepsilon'_\nu}\cdot(-1)^{\sum\limits_1^p\eta_\nu\eta'_\nu}\cdot(-1)^{\sum\limits_1^p(\varepsilon_\nu+\eta_\nu)(\varepsilon'_\nu+\eta'_\nu)}$$

ist, und dass daher $(-1)^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$ nur dann den Werth -1 haben kann, wenn von den drei Ausdrücken:

$$(-1)^{\sum\limits_1^p\varepsilon_\nu\varepsilon'_\nu}, \quad (-1)^{\sum\limits_1^p\eta_\nu\eta'_\nu}, \quad (-1)^{\sum\limits_1^p(\varepsilon_\nu+\eta_\nu)(\varepsilon'_\nu+\eta'_\nu)}$$

entweder ein jeder oder nur ein einziger den Werth -1 hat, oder, mit anderen Worten, wenn von den drei Charakteristiken $[\varepsilon]$, $[\eta]$, $[\varepsilon]+[\eta]$ entweder eine jede oder nur eine einzige ungerade ist. Um das Bestehen der Relation $(-1)^{[a_\mu]\,|\,[a_\nu]} = -1$ nachzuweisen, hat man demnach nur zu zeigen, dass von den drei Charakteristiken $[a_\mu]$, $[a_\nu]$, $[a_\mu]+[a_\nu]$ entweder eine jede oder nur eine einzige ungerade ist.

Zu dem Ende bezeichne man mit $[a'_1], [a'_2], \ldots, [a'_s]$ die s unter den $2p+1$ Charakteristiken $[a]$ vorkommenden ungeraden Charakteristiken, mit $[a''_1], [a''_2], \ldots, [a''_{2p+1-s}]$ die noch übrigen, geraden Charakteristiken $[a]$, verstehe unter σ, σ' irgend zwei der Zahlen $1, 2, \ldots, s$, unter τ, τ' irgend zwei der Zahlen $1, 2, \ldots, 2p+1-s$ und unterscheide, indem man festhält, dass $[n] = [a'_1]+[a'_2]+\cdots+[a'_s]$, auch $s \equiv p \pmod{4}$ ist, in Bezug auf die Beschaffenheit der Charakteristiken $[a_\mu]$, $[a_\nu]$ die folgenden drei Fälle:

1) $[a_\mu] = [a'_\sigma]$, $[a_\nu] = [a'_{\sigma'}]$; es ist dann $[a_\mu]+[a_\nu] = [a'_\sigma]+[a'_{\sigma'}] = [n] + \sum\limits^{s-2}[a']$, also $[a_\mu]+[a_\nu]$ ungerade, weil $s-2 \equiv p+2 \pmod{4}$ ist;

2) $[a_\mu] = [a'_\sigma]$, $[a_\nu] = [a''_\tau]$; es ist dann $[a_\mu]+[a_\nu] = [a'_\sigma]+[a''_\tau] = [n] + \sum\limits^{s-1}[a'] + [a''_\tau]$, also $[a_\mu]+[a_\nu]$ gerade, weil $s \equiv p \pmod{4}$ ist;

3) $[a_\mu] = [a''_\tau]$, $[a_\nu] = [a''_{\tau'}]$; es ist dann $[a_\mu]+[a_\nu] = [a''_\tau]+[a''_{\tau'}] = [n] + \sum\limits^{s}[a'] + [a''_\tau] + [a''_{\tau'}]$, also $[a_\mu]+[a_\nu]$ ungerade, weil $s+2 \equiv p+2 \pmod{4}$ ist.

Im ersten Falle sind also alle drei Charakteristiken $[a_\mu]$, $[a_\nu]$, $[a_\mu]+[a_\nu]$ ungerade, während im zweiten und dritten Falle immer nur eine derselben ungerade ist. Damit ist aber der aufgestellte Satz bewiesen.

Fasst man die für die Beweise der Sätze II, III benutzten Voraussetzungen in's Auge, so erkennt man, dass diese Sätze für jedes System von $2p+1$ Charakteristiken $[a_1], [a_2], \ldots, [a_{2p+1}]$ gelten, zu denen eine Charakteristik $[n]$ existirt von der Beschaffenheit, dass die den Formen $[n] + \sum\limits^{p+4\mu}[a]$, $[n] + \sum\limits^{p+4\mu+1}[a]$, $\mu = {}^{0,}_{-1,}{}^{1,}_{-2,}{}^{2,}_{\cdots}$, entsprechenden Charakteristiken gerade, die den Formen $[n] + \sum\limits^{p+4\mu+2}[a]$, $[n] + \sum\limits^{p+4\mu+3}[a]$, $\mu = {}^{0,}_{-1,}{}^{1,}_{-2,}{}^{2,}_{\cdots}$, entsprechenden Charakteristiken **ungerade** sind, ganz abgesehen davon, auf welche Weise

das betreffende System der Charakteristiken $[a]$ erhalten wurde. Die Totalität aller dieser Charakteristikensysteme kann aber auch umgekehrt durch die in Satz III ausgesprochene Eigenschaft derselben definirt werden. Es existirt nämlich der folgende, in etwas anderer Form zuerst von Herrn *H. Stahl**) bewiesene

Satz IV. *Sind* $[a_1], [a_2], \ldots, [a_{2p+1}]$ $2p+1$ *Charakteristiken von der Beschaffenheit, dass zwischen je zweien von ihnen die Beziehung* $(-1)^{[a_\mu]\,|\,[a_\nu]} = -1$ *besteht, und bezeichnet man mit* $[n]$ *die Summe der unter den* $2p+1$ *Charakteristiken* $[a]$ *vorkommenden ungeraden Charakteristiken, so sind alle Charakteristiken, die den Formen:*

$$[n] + \sum^{p+4\mu}[a], \quad [n] + \sum^{p+4\mu+1}[a], \qquad \mu = {0, \atop} {1, \atop -1,} {2, \atop -2,} {\ldots \atop \ldots},$$

entsprechen, gerade, alle Charakteristiken, die den Formen:

$$[n] + \sum^{p+4\mu+2}[a], \quad [n] + \sum^{p+4\mu+3}[a], \qquad \mu = {0, \atop} {1, \atop -1,} {2, \atop -2,} {\ldots \atop \ldots},$$

entsprechen, ungerade.

Für den Beweis dieses Satzes möge auf die soeben citirte Arbeit des Herrn *Stahl* verwiesen werden.

Aus der Verbindung der Sätze III und IV folgt nun, dass die Totalität derjenigen Charakteristikensysteme, welche dadurch definirt sind, dass zu den $2p+1$ Charakteristiken $[a_1], [a_2], \ldots, [a_{2p+1}]$ eines jeden immer eine Charakteristik $[n]$ existirt von der Beschaffenheit, dass die den Formen $[n] + \sum^{p+4\mu}[a]$, $[n] + \sum^{p+4\mu+1}[a]$, $\mu = {0, \atop} {1, \atop -1,} {2, \atop -2,} {\ldots \atop \ldots}$, entsprechenden Charakteristiken gerade, die den Formen $[n] + \sum^{p+4\mu+2}[a]$, $[n] + \sum^{p+4\mu+3}[a]$, $\mu = {0, \atop} {1, \atop -1,} {2, \atop -2,} {\ldots \atop \ldots}$, entsprechenden Charakteristiken ungerade sind, vollständig identisch ist mit der Totalität derjenigen, bei welchen je zwei der $2p+1$ in einem Systeme enthaltenen Charakteristiken durch die Bedingung $(-1)^{[a_\mu]\,|\,[a_\nu]} = -1$ verknüpft sind. Legt man aber die letztere Definition zu Grunde, so kann man durch Methoden, welche Herr *Frobenius***) ausgebildet hat, die erwähnten Systeme sämmtlich auf directem Wege herstellen. Da sich nun mit Hülfe der Theorie der linearen Transformation weiter auch zeigen lässt, dass jedem solchen auf directem Wege erhaltenen Systeme eine bestimmte Zerlegung der Fläche T entspricht, so folgt schliesslich, dass die Totalität der auf die eine oder andere der beiden soeben angegebenen Weisen definirten Charakteristikensysteme identisch ist mit der Totalität derjenigen, welche den verschiedenen Zerlegungen der Fläche T entsprechen. Endlich mag noch erwähnt werden, dass der Beweis dafür, dass irgend ein einer beliebigen Zerlegung der Fläche T entsprechendes System von $2p+1$ Charakteristiken die in Satz III angeführte Eigenschaft besitzt, ebenfalls auf directem Wege, d. h. ohne Benutzung der Eigenschaften der Thetafunctionen, und zwar durch rein geometrische Betrachtungen geführt werden kann. Zu den letzten Bemerkungen wurde

*) *Stahl, H.*, Beweis eines Satzes von Riemann über ϑ-Charakteristiken. Crelle's Journal, Bd. 88, pag. 273.

**) *Frobenius*, Ueber das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variabeln. Crelle's Journal, Bd. 89, pag. 208.

ich durch einige gütige Mittheilungen des Herrn *Frobenius* veranlasst; ich erlaube mir, an dieser Stelle dem Wunsche Ausdruck zu geben, dass derselbe seine auf diesen Gegenstand bezüglichen Untersuchungen in Bälde weiteren Kreisen zugänglich machen möge.

5.

Die Charakteristiken $[a_1]$, $[a_2]$, ..., $[a_{2p+1}]$, $[0]$ können, wenn man von correspondirenden Ganzen der Periodicitätsmodulen absieht, als Repräsentanten derjenigen Systeme correspondirender Halber der Periodicitätsmodulen betrachtet werden, in welche das Integralsystem $\int\limits_{\alpha_{2p+2}}^{z,s}(du)$ übergeht, wenn man für z, s der Reihe nach die $2p+2$ Verzweigungspunkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p+1}, \alpha_{2p+2}$ einführt. Einem jeden von α_{2p+2} verschiedenen Verzweigungspunkte α_ν entspricht auf diese Weise eine zugleich mit der Zerlegung der Fläche T sich ändernde Charakteristik $[a_\nu]$, während dem zur unteren Grenze des Integralsystems genommenen Verzweigungspunkte α_{2p+2} bei jeder Zerlegung die ausgezeichnete Charakteristik $[0]$ entspricht. Um diese Ausnahmestellung des Verzweigungspunktes α_{2p+2} zu beseitigen, wähle man eine beliebige Charakteristik $[a_0]$, bezeichne das ihr entsprechende System correspondirender Halber der Periodicitätsmodulen mit $\frac{M_1}{2}\Big|\frac{M_2}{2}\Big|\cdots\Big|\frac{M_p}{2}$ und bilde ein neues Integralsystem $w_1 \,|\, w_2 \,|\cdots|\, w_p$, definirt durch die Gleichungen:

$$w_1 = \frac{M_1}{2} + \int\limits_{\alpha_{2p+2}}^{z,s} du_1,\quad w_2 = \frac{M_2}{2} + \int\limits_{\alpha_{2p+2}}^{z,s} du_2,\quad \ldots\ldots,\quad w_p = \frac{M_p}{2} + \int\limits_{\alpha_{2p+2}}^{z,s} du_p.$$

Unter Zugrundelegung dieses Integralsystems entsprechen jetzt den Verzweigungspunkten:

$$\alpha_1,\ \ldots\ldots,\ \alpha_{2p+1},\ \alpha_{2p+2}$$

beziehlich die Charakteristiken:

$$[a_1'] = [a_0] + [a_1],\ \ldots\ldots,\ [a_{2p+1}'] = [a_0] + [a_{2p+1}],\ [a_{2p+2}'] = [a_0] + [0],$$

und man ist auf diese Weise zu einem Systeme von $2p+2$ Charakteristiken gelangt, bei welchem keine Charakteristik einen Vorzug vor den übrigen hat. Setzt man der Reihe nach $[a_0] = [a_1]$, $[a_2]$, ..., $[a_{2p+1}]$, $[0]$, so erhält man alle diejenigen speciellen Systeme, bei welchen die Charakteristik $[0]$ vorkommt. Die in dem ν^{ten} dieser Systeme enthaltenen $2p+2$ Charakteristiken:

$$[a_\nu] + [a_1],\ \ldots,\ [a_\nu] + [a_{\nu-1}],\ [0],\ [a_\nu] + [a_{\nu+1}],\ \ldots,\ [a_\nu] + [a_{2p+1}],\ [a_\nu]$$

entsprechen dann zugleich den $2p+2$ Systemen correspondirender Halber der Periodicitätsmodulen, in welche das Integralsystem $\int\limits_{\alpha_\nu}^{z,s}(du)$, dessen untere Grenze der Verzweigungspunkt α_ν ist, übergeht, wenn man an Stelle von z, s der Reihe nach die $2p+2$ Verzweigungspunkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p+2}$ treten lässt. Die Eigenschaften des Systems $[a_1']$, $[a_2']$, ..., $[a_{2p+2}']$ sollen jetzt untersucht werden.

Die soeben eingeführte willkürliche Charakteristik $[a_0]$ lässt sich, da zwischen den Charakteristiken $[a_1]$, $[a_2]$, ..., $[a_{2p+1}]$ nur die eine lineare Relation:

$$(1)\qquad [a_1]+[a_2]+\cdots+[a_{2p+1}]=[0]$$

besteht, immer und zwar auf zwei Weisen als Summe von Charakteristiken $[a]$ darstellen. Von diesen beiden Darstellungen, welche zusammen alle $2p+1$ Charakteristiken $[a]$ und zwar jede nur einmal enthalten, wähle man diejenige, bei welcher die Anzahl der vorkommenden Charakteristiken $[a]$ ungerade ist. Bezeichnet man mit $2n+1$ die Anzahl der betreffenden Charakteristiken, mit $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n+1}$ die denselben entsprechenden Stellenzahlen, so erhält man die erwähnte Darstellung von $[a_0]$ in der Form:

$$(2)\qquad [a_0]=[a_{\mu_1}]+[a_{\mu_2}]+\cdots+[a_{\mu_{2n+1}}].$$

Geht man jetzt auf die die Charakteristiken $[a']$ definirenden Gleichungen zurück, so erkennt man, dass zwischen diesen Charakteristiken, entsprechend den Gleichungen (1), (2), die linearen Relationen:

$$(1')\qquad [a'_1]+[a'_2]+\cdots+[a'_{2p+1}]+[a'_{2p+2}]=[0],$$

$$(2')\qquad [a'_{\mu_1}]+[a'_{\mu_2}]+\cdots+[a'_{\mu_{2n+1}}]=[0],$$

bestehen. Durch Verbindung derselben erhält man eine dritte lineare Relation in der Form:

$$(3')\qquad [a'_{\nu_1}]+[a'_{\nu_2}]+\cdots+[a'_{\nu_{2p-2n+1}}]=[0],$$

wenn mit $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{2p-2n+1}$ die $2p-2n+1$ von $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n+1}$ verschiedenen Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, 2p+2$ bezeichnet werden. Ausser diesen drei Relationen kann nicht noch eine weitere lineare Relation zwischen den Charakteristiken $[a']$ bestehen; denn eine solche könnte man, indem man rückwärts wieder die Charakteristiken $[a_0]$, $[a_1]$, ..., $[a_{2p+1}]$ einführte, in eine lineare Relation zwischen diesen verwandeln, und es würde dadurch, wenn die ursprüngliche Relation eine gerade Anzahl von Charakteristiken $[a']$ enthielte, eine von (1) verschiedene lineare Relation zwischen den Charakteristiken $[a_1]$, $[a_2]$, ..., $[a_{2p+1}]$ entstehen, wenn dieselbe dagegen eine ungerade Anzahl von Charakteristiken $[a']$ enthielte, eine lineare Relation zwischen $[a_0]$ und gewissen der Charakteristiken $[a_1]$, $[a_2]$, ..., $[a_{2p+1}]$, aus der sich $[a_0]$ noch auf eine dritte Weise durch Charakteristiken aus der Reihe $[a_1]$, $[a_2]$, ..., $[a_{2p+1}]$ ausdrücken liesse; beides ist aber unmöglich.

Um nun eine auf das System $[a'_1]$, $[a'_2]$, ..., $[a'_{2p+2}]$ bezügliche ausgezeichnete Darstellung der beliebigen Charakteristik $[\varepsilon]$ zu erhalten, welche dasselbe leistet wie die frühere, auf das System $[a_1]$, $[a_2]$, ..., $[a_{2p+1}]$ bezügliche, berücksichtige man, dass sich $[\varepsilon]$ immer und zwar auf zwei Weisen aus der Charakteristik $[n]$ und Charakteristiken $[a]$ zusammensetzen lässt in der Form $[\varepsilon]=[n]+\overset{r}{\Sigma}[a]$, $0<r<2p+1$, und dass nach Satz I eine in dieser Weise zusammengesetzte Charakteristik $[\varepsilon]$ **gerade** ist, wenn (unter μ eine positive oder negative ganze Zahl verstanden) r von der Form $p+4\mu$

oder $p+4\mu+1$, ungerade, wenn r von der Form $p+4\mu+2$ oder $p+4\mu+3$ ist. Bringt man nun die Gleichung $[\varepsilon]=[n]+\overset{r}{\Sigma}[a]$ in die Form:

$$[\varepsilon]=[n]+\alpha_1[a_1]+\alpha_2[a_2]+\cdots+\alpha_{2p+1}[a_{2p+1}],$$

indem man allgemein unter α_ν die Zahl 1 oder die Zahl 0 versteht, je nachdem die Charakteristik $[a_\nu]$ in der obigen Summe $\overset{r}{\Sigma}[a]$ vorkommt oder nicht vorkommt, bildet dann weiter aus der letzten Gleichung die neue:

$$[\varepsilon]=([n]+\overline{p+1}[a_0])+\alpha_1([a_0]+[a_1])+\cdots+\alpha_{2p+1}([a_0]+[a_{2p+1}])+\alpha_{2p+2}[a_0],$$

indem man unter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p+1}$ dieselben Grössen wie vorher versteht, die Grösse α_{2p+2} dagegen als 0 oder 1 aus der Congruenz:

$$\alpha_{2p+2}\equiv p+1+\sum_1^{2p+1}\alpha_\nu \pmod{2}$$

bestimmt, führt hierauf die Charakteristiken $[a']$ ein und setzt endlich noch zur Abkürzung:

$$[n]+\overline{p+1}[a_0]=[n'],$$

so erhält man für $[\varepsilon]$ eine Darstellung von der Form:

$$[\varepsilon]=[n']+\alpha_1[a'_1]+\alpha_2[a'_2]+\cdots+\alpha_{2p+1}[a'_{2p+1}]+\alpha_{2p+2}[a'_{2p+2}],$$

bei der die Zahlen α durch die Bedingung $\sum_1^{2p+2}\alpha_\nu\equiv p+1 \pmod{2}$ verknüpft sind.

Da, wie vorher bemerkt, die Charakteristik $[\varepsilon]$ auf zwei Weisen in die Form $[\varepsilon]=[n]+\overset{r}{\Sigma}[a]$ gebracht werden kann, und dem entsprechend die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p+2}$, unter Festhaltung der Bedingung $\sum_1^{2p+2}\alpha_\nu\equiv p+1 \pmod{2}$ auf zwei Weisen sich bestimmen lassen, so umfasst auch die letzte Gleichung zwei verschiedene Darstellungen derselben Charakteristik $[\varepsilon]$, die zusammen alle $2p+2$ Charakteristiken $[a']$, aber jede nur einmal, enthalten, und von denen daher jede aus der anderen durch Addition der Gleichung $[0]=[a'_1]+[a'_2]+\cdots+[a'_{2p+2}]$ hervorgeht. Eine dritte der Bedingung $\sum_1^{2p+2}\alpha_\nu\equiv p+1 \pmod{2}$ genügende Darstellung der Charakteristik $[\varepsilon]$ durch die Charakteristiken $[n'], [a'_1], [a'_2], \ldots, [a'_{2p+2}]$ kann nicht existiren, da sich aus ihr durch Verbindung mit einer der beiden soeben gewonnenen Darstellungen eine von (1') verschiedene, nach Früherem nicht mögliche lineare Relation zwischen einer geraden Anzahl von Charakteristiken $[a']$ ergeben würde.

Ist irgend eine Charakteristik $[\varepsilon]$ auf eine der beiden angegebenen Weisen durch die Charakteristik $[n']$ und die Charakteristiken $[a']$ dargestellt, so gestalten sich die Kriterien dafür, ob dieselbe gerade oder ungerade ist, ungemein einfach. Nach dem Früheren ist nämlich die Charakteristik $[\varepsilon]$ gerade, wenn von den $2p+1$ Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p+1}$ $p+4\mu$ oder $p+4\mu+1$ den Werth 1, die übrigen den Werth 0 haben; im ersten Falle ergibt sich für α_{2p+2} der Werth 1, im zweiten Falle der Werth 0, so dass in beiden Fällen von den $2p+2$ Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p+1}, \alpha_{2p+2}$ $p+4\mu+1$

den Werth 1, die übrigen den Werth 0 haben. Dagegen ist die Charakteristik $[\varepsilon]$ ungerade, wenn von den $2p+1$ Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p+1}$ $p+4\mu+2$ oder $p+4\mu+3$ den Werth 1, die übrigen den Werth 0 haben; im ersten Falle ergibt sich für α_{2p+2} der Werth 1, im zweiten Falle der Werth 0, so dass in beiden Fällen von den $2p+2$ Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p+1}, \alpha_{2p+2}$ $p+4\mu+3$ den Werth 1, die übrigen den Werth 0 haben. Fasst man diese Resultate zusammen, so erhält man den folgenden

Satz V. *Bildet man aus den früher definirten Charakteristiken $[a_1], \ldots, [a_{2p+1}]$, $[n]$ unter Zuhülfenahme einer willkürlich gewählten Charakteristik $[a_0]$ die neuen Charakteristiken $[a'_1], \ldots, [a'_{2p+1}], [a'_{2p+2}], [n']$, bestimmt durch die Gleichungen:*

$$[a'_1] = [a_0] + [a_1], \; \ldots \; , [a'_{2p+1}] = [a_0] + [a_{2p+1}], \; [a'_{2p+2}] = [a_0] + [0],$$
$$[n'] = [n] + \overline{p+1}\,[a_0],$$

so lässt sich durch diese jede beliebige Charakteristik $[\varepsilon]$ immer und zwar auf zwei Weisen darstellen in der Form:

$$[\varepsilon] = [n'] + \alpha_1 [a'_1] + \cdots + \alpha_{2p+1} [a'_{2p+1}] + \alpha_{2p+2} [a'_{2p+2}], \qquad \sum_1^{2p+2} \alpha_\nu \equiv p+1 \pmod{2},$$

wobei die α nur die Werthe 0, 1 annehmen sollen. Eine in dieser Form gegebene Charakteristik $[\varepsilon]$ ist dann gerade oder ungerade, je nachdem (unter μ eine positive oder negative ganze Zahl verstanden) $p+4\mu+1$ oder $p+4\mu+3$ der $2p+2$ Grössen α den Werth 1 haben.

Der gewonnene Satz kann umgekehrt werden und liefert dann den

Satz VI. *Besitzt ein System von $2p+2$ Charakteristiken $[a'_1], [a'_2], \ldots, [a'_{2p+1}]$, $[a'_{2p+2}]$, einerlei wie es im Übrigen beschaffen sein mag, die Eigenschaft, dass zu ihm eine Charakteristik $[n']$ existirt, welche zu den Charakteristiken $[a']$ in der Beziehung steht, dass die Charakteristik:*

$$[\varepsilon] = [n'] + \alpha_1 [a'_1] + \cdots + \alpha_{2p+1} [a'_{2p+1}] + \alpha_{2p+2} [a'_{2p+2}], \qquad \sum_1^{2p+2} \alpha_\nu \equiv p+1 \pmod{2},$$

gerade oder ungerade ist, je nachdem $p+4\mu+1$ oder $p+4\mu+3$ der $2p+2$ Grössen α den Werth 1 haben, so entsteht aus diesem Systeme durch Addition einer beliebigen seiner $2p+2$ Charakteristiken zu den $2p+1$ übrigen immer ein System von $2p+1$ Charakteristiken $[a_1], [a_2], \ldots, [a_{2p+1}]$ mit den in Satz I angegebenen Eigenschaften.

Da von den $2p+2$ Charakteristiken $[a']$ jede mit den anderen gleichberechtigt ist, so genügt es zum Beweise dieses Satzes, zu zeigen, dass das System:

$$[a_1] = [a'_1] + [a'_{2p+2}], \; [a_2] = [a'_2] + [a'_{2p+2}], \; \ldots, \; [a_{2p+1}] = [a'_{2p+1}] + [a'_{2p+2}]$$

die in Satz I fixirten Eigenschaften besitzt. Zu dem Ende bestimme man eine Charakteristik $[n]$ durch die Gleichung:

$$[n] = [n'] + \overline{p+1}\,[a'_{2p+2}].$$

Es besteht dann, wenn $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$ r beliebig gewählte Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, 2p+1$ bezeichnen, und unter a eine Grösse verstanden wird, die als 0 oder 1 aus der Congruenz $a \equiv p+1+r \pmod{2}$ zu bestimmen ist, immer die Gleichung:

$$[n] + [a_{\varkappa_1}] + [a_{\varkappa_2}] + \cdots + [a_{\varkappa_r}] = [n'] + [a'_{\varkappa_1}] + [a'_{\varkappa_2}] + \cdots + [a'_{\varkappa_r}] + \alpha\,[a_{2p+2}].$$

Da nun den möglichen Werthen:

$$p + 4\mu,\quad p + 4\mu + 1,\quad p + 4\mu + 2,\quad p + 4\mu + 3$$

von r die Werthe:

$$1,\ 0,\ 1,\ 0$$

von α beziehlich entsprechen, und daher die Anzahl der auf der rechten Seite der obigen Gleichung vorkommenden Charakteristiken $[a']$ in den beiden ersten Fällen $p + 4\mu + 1$, in den beiden letzten $p + 4\mu + 3$ beträgt, so folgt, unter Berücksichtigung der über die Charakteristiken $[a']$ gemachten Voraussetzungen, dass die Charakteristik $[n] + [a_{\varkappa_1}] + [a_{\varkappa_2}] + \cdots + [a_{\varkappa_r}]$ gerade ist, wenn r von der Form $p + 4\mu$ oder $p + 4\mu + 1$, ungerade, wenn r von der Form $p + 4\mu + 2$ oder $p + 4\mu + 3$ ist. Damit ist aber bewiesen, dass das System $[a_1], [a_2], \ldots, [a_{2p+1}]$ die in Satz I fixirten Eigenschaften besitzt.

6.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass zu den im vorigen Artikel definirten Charakteristiken:

$$[a'_1] = [a_0] + [a_1], \ldots, [a'_{2p+1}] = [a_0] + [a_{2p+1}],\ [a_{2p+2}] = [a_0] + [0]$$

immer nur eine Charakteristik $[n']$ existirt von der Art, dass eine in der Form:

$$[\varepsilon] = [n'] + \alpha_1\,[a'_1] + \cdots + \alpha_{2p+1}\,[a'_{2p+1}] + \alpha_{2p+2}\,[a'_{2p+2}],\qquad \sum_1^{2p+2} \alpha_\nu \equiv p + 1 \ (\text{mod. } 2),$$

dargestellte Charakteristik gerade oder ungerade ist, je nachdem von den $2p + 2$ Grössen α $p + 4\mu + 1$ oder $p + 4\mu + 3$ den Werth 1 haben; auch lässt sich zeigen, dass diese Charakteristik, die also mit der im vorigen Artikel durch die Gleichung $[n'] = [n] + p + 1\,[a_0]$ bestimmten Charakteristik nothwendig übereinstimmen muss, immer der Summe der unter den $2p + 2$ Charakteristiken $[a']$ vorkommenden ungeraden Charakteristiken gleich ist. Die Richtigkeit des Gesagten soll jetzt nachgewiesen werden.

Zu dem Ende bezeichne man mit $[n']$ eine den soeben erwähnten Bedingungen genügende Charakteristik. Aus den beiden in der Form:

$$[\varepsilon] = [n'] + \alpha_1\,[a'_1] + \cdots + \alpha_{2p+1}\,[a'_{2p+1}] + \alpha_{2p+2}\,[a'_{2p+2}],\qquad \sum_1^{2p+2} \alpha_\nu \equiv p + 1 \ (\text{mod. } 2),$$

enthaltenen Darstellungen einer beliebigen Charakteristik $[\varepsilon]$, welche kanonische genannt werden sollen, kann man dann, indem man zu den betreffenden Gleichungen die unter (2′) angeführte $[0] = [a'_{\mu_1}] + [a'_{\mu_2}] + \cdots + [a'_{\mu_{2n+1}}]$ addirt, für dieselbe Charakteristik $[\varepsilon]$ zwei weitere Darstellungen erhalten, bei welchen aber $\sum_1^{2p+2} \alpha_\nu \equiv p \ (\text{mod. } 2)$ ist, und welche daher nichtkanonische genannt werden sollen. Diese Darstellungen

unterscheiden sich von den kanonischen wesentlich dadurch, dass bei ihnen aus der Anzahl der von 0 verschiedenen Grössen α nicht darauf geschlossen werden kann, ob die dargestellte Charakteristik $[\varepsilon]$ gerade oder ungerade ist.

Es sei jetzt:

$$[0] \equiv [n'] + [a'_{\varphi_1}] + [a'_{\varphi_2}] + \cdots + [a'_{\varphi_t}], \quad t \equiv p \,(\text{mod. } 2),$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, 2p+2$ bezeichnen, eine der beiden nach dem Vorigen immer existirenden nichtkanonischen Darstellungen der Charakteristik $[0]$. Bezeichnet man dann mit $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{2p+2-t}$ die $2p+2-t$ von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$ verschiedenen Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, 2p+2$ und addirt zur linken und rechten Seite der letzten Congruenz das eine Mal eine beliebige der t Charakteristiken $[a'_{\varphi}]$, z. B. $[a'_{\varphi_\tau}]$, das andere Mal eine beliebige der $2p+2-t$ Charakteristiken $[a'_{\chi}]$, z. B. $[a'_{\chi_{\tau'}}]$, so erhält man für $[a'_{\varphi_\tau}]$ und $[a'_{\chi_{\tau'}}]$ die kanonischen Darstellungen:

$$[a'_{\varphi_\tau}] \equiv [n'] + [a'_{\varphi_1}] + \cdots + [a'_{\varphi_{\tau-1}}] + [a'_{\varphi_{\tau+1}}] + \cdots + [a'_{\varphi_t}],$$

$$[a'_{\chi_{\tau'}}] \equiv [n'] + [a'_{\varphi_1}] + [a_{\varphi_2}] + \cdots + [a'_{\varphi_t}] + [a'_{\chi_{\tau'}}],$$

und erkennt daraus, da die Anzahl der auf der rechten Seite der ersten Gleichung vorkommenden Charakteristiken $[a']$ immer $t-1$, die Anzahl der auf der rechten Seite der zweiten stehenden immer $t+1$ beträgt, auch diese Zahlen sich um 2 unterscheiden, mit Rücksicht auf die über das System der Charakteristiken $[a']$ und die Charakteristik $[n']$ gemachten Voraussetzungen, dass die t Charakteristiken $[a'_{\varphi}]$, aber auch die $2p+2-t$ Charakteristiken $[a'_{\chi}]$ entweder sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade sind, und ferner, dass bei geraden $[a'_{\varphi}]$ die $[a'_{\chi}]$ ungerade, bei ungeraden $[a'_{\varphi}]$ die $[a'_{\chi}]$ gerade sind. Die Charakteristik $[n']$ muss daher entweder mit der Summe aller unter den $2p+2$ Charakteristiken $[a']$ vorkommenden geraden oder mit der Summe aller unter den $2p+2$ Charakteristiken $[a']$ vorkommenden ungeraden Charakteristiken übereinstimmen; beides kommt aber auf dasselbe hinaus, da in Folge der Relation: $[a'_1] + \cdots + [a'_{2p+2}] \equiv [0]$ die Summe aller geraden Charakteristiken $[a']$ der Summe aller ungeraden Charakteristiken $[a']$ gleich ist.

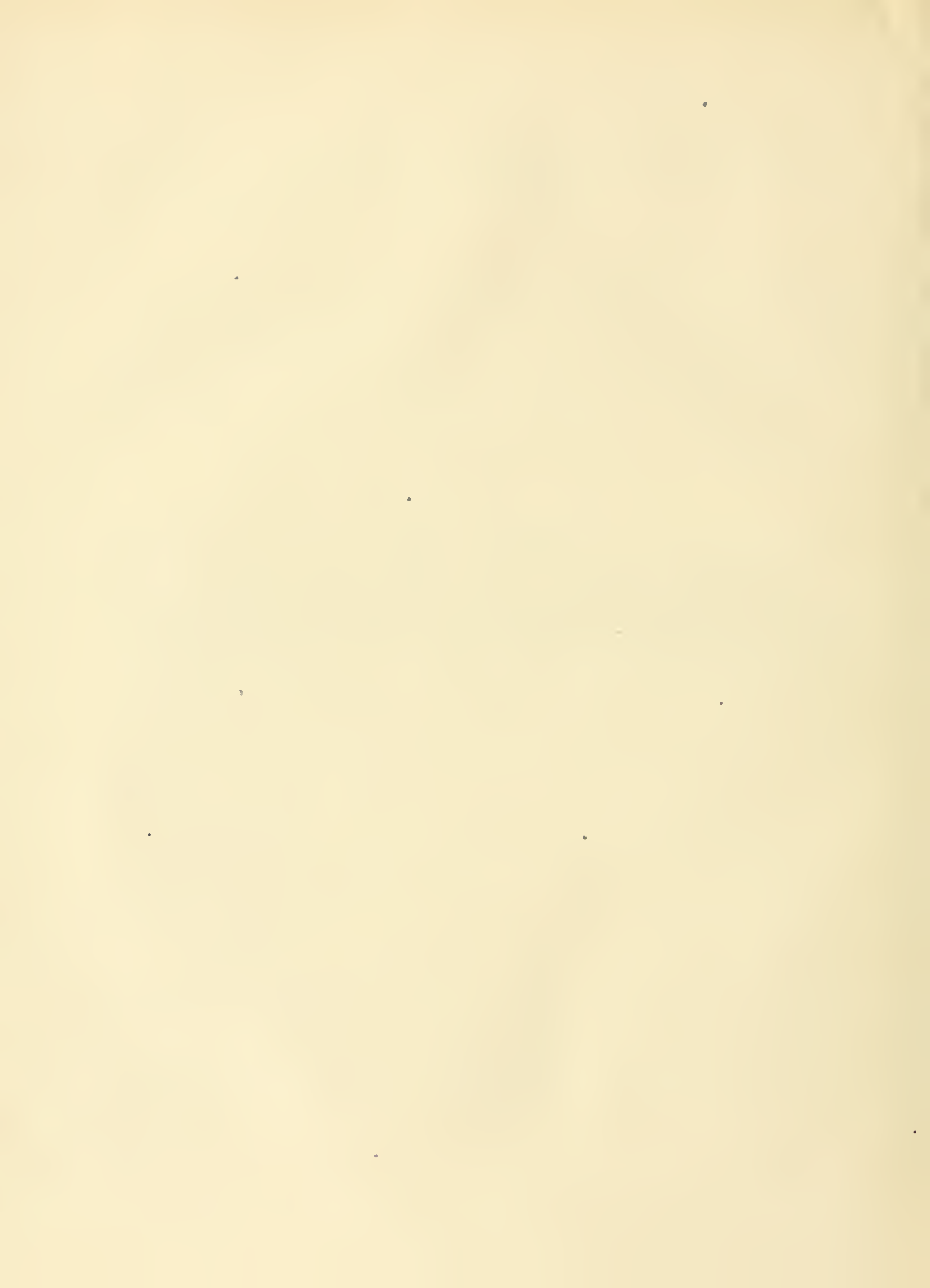
Identificirt man nun auf Grund des Gefundenen die vorher eingeführten Charakteristiken $[a'_{\varphi_1}], [a'_{\varphi_2}], \ldots, [a'_{\varphi_t}]$ mit den unter den $2p+2$ Charakteristiken $[a']$ befindlichen ungeraden Charakteristiken, so folgt aus der obigen, die Charakteristik $[a'_{\varphi_\tau}]$ darstellenden Gleichung, dass $t-1$ von der Form $p+4\mu+3$, also $t \equiv p \,(\text{mod. } 4)$ ist. Man hat somit den

Satz VII. *Die zu den Charakteristiken $[a'_1], [a'_2], \ldots, [a'_{2p+2}]$ gehörige, in Satz V durch die Gleichung $[n'] \equiv [n] + \overline{p+1}\,[a_0]$ bestimmte Charakteristik $[n']$ ist stets gleich der Summe der unter den Charakteristiken $[a']$ vorkommenden ungeraden Charakteristiken. Bezeichnet man mit t die Anzahl dieser ungeraden Charakteristiken, so ist stets $t \equiv p$ (mod. 4).*

Durch diesen Satz ist die vollständige Analogie zwischen den hier betrachteten allgemeinen Systemen von $2p+2$ Charakteristiken und den speciellen, bei welchen eine der $2p+2$ Charakteristiken der Charakteristik $[0]$ gleich ist, hergestellt.

V.

Ueber ein für die Theorie der Thetafunctionen fundamentales System linearer Gleichungen.



1.

Ein System von n linearen Gleichungen zwischen den $2n$ Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, welches entweder die Form:

$$(A_1)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} e_{1\nu} x_\nu = x'_1, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} e_{2\nu} x_\nu = x'_2, \quad \ldots\ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} e_{n\nu} x_\nu = x'_n$$

besitzt oder auf dieselbe gebracht werden kann, soll ein involutorisches genannt werden, wenn die Auflösung desselben nach den x als Unbekannten, einerlei welche Werthe man den x' zulegen mag, durch die Gleichungen:

$$(B_1)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} e_{1\nu} x'_\nu = x_1, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} e_{2\nu} x'_\nu = x_2, \quad \ldots\ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} e_{n\nu} x'_\nu = x_n,$$

wobei die e dieselben Grössen bezeichnen wie in (A_1), repräsentirt wird. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Eintreten dieses Falles sind:

$$(\mathrm{I})\qquad e_{\mu 1} e_{1\nu} + e_{\mu 2} e_{2\nu} + \cdots + e_{\mu n} e_{n\nu} = \begin{matrix} 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \\ 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \end{matrix} \qquad {\scriptstyle \mu,\,\nu = 1,2,\ldots,n;}$$

man erhält dieselben, indem man die Ausdrücke für die x aus dem Systeme (B_1) in die μ^{te} Gleichung des Systems (A_1) einsetzt und berücksichtigt, dass die dadurch entstehende Gleichung in Bezug auf die x' identisch erfüllt sein muss. Genügen die Coefficienten e den Bedingungen (I), so erhält man für das Quadrat der Determinante $\Delta = \Sigma \pm e_{11} e_{22} \ldots e_{nn}$ den Werth 1, d. h. es ist $\Delta^2 = 1$, $\Delta = \pm 1$; auch ist dann für jedes μ und ν von 1 bis n $\bar{e}_{\mu\nu} = \Delta e_{\nu\mu}$, wenn mit $\bar{e}_{\mu\nu}$ der Coefficient von $e_{\mu\nu}$ in der Determinante Δ, oder was dasselbe, die zu $e_{\mu\nu}$ gehörige erste Unterdeterminante bezeichnet wird.

Ein System von n linearen Gleichungen zwischen den $2n$ Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, welches entweder die Form:

$$(A_2)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} e_{1\nu} x_\nu = x'_1, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} e_{2\nu} x_\nu = x'_2, \quad \ldots\ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} e_{n\nu} x_\nu = x'_n$$

besitzt oder auf dieselbe gebracht werden kann, soll dagegen ein orthogonales genannt werden, wenn die Auflösung desselben nach den x als Unbekannten, einerlei welche Werthe man den x' zulegen mag, durch die Gleichungen:

$$(B_2)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} e_{\nu 1} x'_\nu = x_1, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} e_{\nu 2} x'_\nu = x_2, \quad \ldots\ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} e_{\nu n} x'_\nu = x_n.$$

wobei die c dieselben Grössen bezeichnen wie in (A_2), repräsentirt wird. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Eintreten dieses Falles sind:

$$\text{(II)} \qquad c_{\mu 1} c_{\nu 1} + c_{\mu 2} c_{\nu 2} + \cdots + c_{\mu n} c_{\nu n} = \begin{matrix} 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \\ 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \end{matrix} \qquad \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n;$$

man erhält sie durch dasselbe Verfahren, wie es oben zur Herstellung von (I) angegeben wurde; genügen die Coefficienten c den Bedingungen (II), so erhält man hier gleichfalls $\varDelta^2 = 1$, $\varDelta = \pm 1$; dagegen ist nunmehr für jedes μ und ν von 1 bis n $\bar{c}_{\mu\nu} = \varDelta c_{\mu\nu}$.

Es kann der Fall eintreten, dass für ein System von n linearen Gleichungen, wie es unter (A_1) und (A_2) aufgestellt wurde, die Bedingungen (I) und (II) gleichzeitig erfüllt sind. Ein solches System besitzt dann sowohl alle Eigenschaften eines involutorischen, wie alle Eigenschaften eines orthogonalen Systems und soll dem entsprechend ein orthogonales involutorisches System genannt werden. Da aus (I) die Gleichung $\bar{c}_{\mu\nu} = \varDelta c_{\nu\mu}$, aus (II) die Gleichung $\bar{c}_{\mu\nu} = \varDelta c_{\mu\nu}$ folgt, so müssen die Coefficienten eines orthogonalen involutorischen Systems nothwendig den Bedingungen:

$$(E) \qquad c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}, \qquad \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

genügen. Da aber anderseits durch Hinzunahme dieser Bedingungen die Gleichungen (I) in die Gleichungen (II) und umgekehrt diese in jene übergeführt werden können, so ergibt sich, dass ein orthogonales involutorisches System auch definirt werden kann als ein involutorisches, dessen Coefficienten den Bedingungen (E) genügen, mit demselben Rechte aber auch als ein orthogonales, dessen Coefficienten den Bedingungen (E) genügen.

In der Theorie der allgemeinen Thetafunctionen spielen gewisse involutorische und orthogonale involutorische Systeme eine grosse Rolle; im Folgenden sollen dieselben aufgestellt und untersucht werden.

2.

Die $n = \delta^{2p}$ Zahlencomplexe, welche aus dem Symbole:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_p \end{bmatrix}$$

hervorgehen, wenn man darin an Stelle des Systems der $2p$ Buchstaben $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ der Reihe nach die δ^{2p} Variationen der Elemente $0, 1, 2, \ldots, \delta - 1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt, sollen Charakteristiken genannt werden. Bringt man diese n Charakteristiken in eine bestimmte, willkürlich wählbare, der Einfachheit wegen mit der Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\end{smallmatrix}\right]$ beginnende Reihenfolge, so kommt jeder dieser n Charakteristiken eine bestimmte Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ als Stellenzahl zu, speciell der Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$ die Zahl 1. Man bezeichne nun mit:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_p \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \varrho \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots & \varrho_p \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_p \end{bmatrix}$$

irgend zwei dieser n Charakteristiken, mit ν die Stellenzahl der ersten, mit μ die

Stellenzahl der zweiten und bilde aus den Elementen der beiden Charakteristiken den Ausdruck:

$$c_{\mu\nu} = e^{\frac{2\pi i}{\delta}\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}(\alpha_\varkappa\sigma_\varkappa - \beta_\varkappa\varrho_\varkappa)}.$$

Lässt man dann mit Rücksicht auf denselben sowohl für die Charakteristik $\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$ als auch, unabhängig davon, für die Charakteristik $\begin{bmatrix}\varrho\\\sigma\end{bmatrix}$ eine jede der n Charakteristiken treten, so erhält man im Ganzen n^2 Grössen $c_{\mu\nu}$, die man der besseren Uebersicht wegen in die folgende quadratische Tabelle zusammenstelle:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & \cdot & \cdot & \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & c_{11} & \cdot\ \cdot\ \cdot & & c_{1\nu} & \cdot\ \cdot\ \cdot & & c_{1n} \\
\cdot & & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & & & & & & & \\
\begin{bmatrix}\varrho\\\sigma\end{bmatrix} & c_{\mu 1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & & c_{\mu\nu} & \cdot\ \cdot\ \cdot & & c_{\mu n} \\
\cdot & & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & & & & & & & \\
\cdot & c_{n1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & & c_{n\nu} & \cdot\ \cdot\ \cdot & & c_{nn}
\end{array}$$

Sowohl über der Tabelle wie links davon hat man sich die sämmtlichen n Charakteristiken in der gewählten Reihenfolge angeschrieben zu denken, so dass links von $c_{\mu\nu}$ die der Stellenzahl μ und über $c_{\mu\nu}$ die der Stellenzahl ν entsprechende Charakteristik steht.

Das so definirte System der Grössen c besitzt dann die folgenden Eigenschaften:

1) Für jeden Werth von μ und ν ist $c_{\mu\nu}^{\delta} = 1$, $c_{\mu 1} = 1$, $c_{1\nu} = 1$, $c_{\mu\mu} = 1$; ferner $c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}^{-1}$ oder $c_{\mu\nu}c_{\nu\mu} = 1$.

2) Sind $\begin{bmatrix}\varrho\\\sigma\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\varrho'\\\sigma'\end{bmatrix}$ irgend zwei verschiedene Charakteristiken, denen die Stellenzahlen μ, μ' beziehlich zukommen, und versteht man unter der Differenz $\begin{bmatrix}\varrho\\\sigma\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\varrho'\\\sigma'\end{bmatrix}$ dieser beiden Charakteristiken diejenige (immer von $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ verschiedene) Charakteristik $\begin{bmatrix}\varrho''\\\sigma''\end{bmatrix}$, deren Elemente für jeden Index $\varkappa$ durch die Congruenzen $\varrho''_\varkappa \equiv \varrho_\varkappa - \varrho'_\varkappa$, $\sigma''_\varkappa \equiv \sigma_\varkappa - \sigma'_\varkappa \pmod{\delta}$ bestimmt sind, so hat man stets:

$$e^{\frac{2\pi i}{\delta}\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}(\alpha_\varkappa\sigma_\varkappa - \beta_\varkappa\varrho_\varkappa)} : e^{\frac{2\pi i}{\delta}\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}(\alpha_\varkappa\sigma'_\varkappa - \beta_\varkappa\varrho'_\varkappa)} = e^{\frac{2\pi i}{\delta}\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}(\alpha_\varkappa\sigma''_\varkappa - \beta_\varkappa\varrho''_\varkappa)} : 1,$$

und daher auch, wenn man die zu $\begin{bmatrix}\varrho''\\\sigma''\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varrho\\\sigma\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\varrho'\\\sigma'\end{bmatrix}$ gehörige Stellenzahl mit μ'', wobei dann immer $\mu'' > 1$, bezeichnet, für jeden Index ν:

$$c_{\mu\nu} : c_{\mu'\nu} = c_{\mu''\nu} : 1 \quad \text{oder} \quad c_{\mu\nu}\, c_{\mu'\nu}^{-1} = c_{\mu''\nu}.$$

Man erhält daher aus irgend zwei Horizontalreihen des Systems der Grössen c immer wieder eine Horizontalreihe desselben, wenn man jedes Glied der einen durch das ihm

entsprechende der anderen dividirt, und es entspricht einer solchen auf zwei Horizontalreihen bezüglichen Division stets die Subtraction der beiden den Horizontalreihen entsprechenden Charakteristiken. Dasselbe gilt auch für irgend zwei Verticalreihen. Aus der letzten Gleichung $c_{\mu\nu} c_{\mu'\nu}^{-1} = c_{\mu''\nu}$ folgt, da nach 1) auch $c_{\mu'\nu}^{-1} = c_{\nu\mu'}$ ist, die im Folgenden zur Anwendung kommende Relation:

$$c_{\mu\nu}\, c_{\nu\mu'} = c_{\mu''\nu}. \qquad (\mu'' > 1, \text{ wenn } \mu \gtrless \mu')$$

3) Es ist:

$$c_{\mu 1} + c_{\mu 2} + \cdots + c_{\mu n} = \begin{matrix} 0, \text{ wenn } \mu > 1, \\ n, \text{ wenn } \mu = 1. \end{matrix}$$

Man hat nämlich zunächst:

$$c_{\mu 1} + c_{\mu 2} + \cdots + c_{\mu n} = \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_p}}^{0, 1, \ldots, \delta - 1} e^{\frac{2\pi i}{\delta} \sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} (\alpha_\varkappa \sigma_\varkappa - \beta_\varkappa \varrho_\varkappa)},$$

wobei die Summation in der Weise auszuführen ist, dass sämmtliche $2p$ Summationsbuchstaben α, β unabhängig von einander die Werthe $0, 1, \ldots, \delta - 1$ annehmen, die Charakteristik $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ also die Reihe der n Charakteristiken durchläuft. Aendert man einen dieser Summationsbuchstaben, z. B. α_λ oder β_λ, um 1, ersetzt also im allgemeinen Gliede der die rechte Seite bildenden Summe α_λ durch $\alpha_\lambda + 1$, beziehlich β_λ durch $\beta_\lambda + 1$, so wird dadurch nur die Anordnung der Summanden geändert, der Werth der Summe selbst jedoch in keiner Weise alterirt. Anderseits aber erlangt das allgemeine Glied der Summe bei Aenderung von α_λ um 1 den Factor $e^{\frac{2\pi i}{\delta}\sigma_\lambda}$, bei Aenderung von β_λ um 1 den Factor $e^{-\frac{2\pi i}{\delta}\varrho_\lambda}$, der, da er von den Summationsbuchstaben α, β unabhängig ist, von der ganzen Summe angenommen wird. Da dies für $\lambda = 1, 2, \ldots, p$ gilt, so folgt, dass die obige Summe den Werth 0 besitzt, wenn auch nur eine der Grössen ϱ, σ von 0 verschieden ist, oder, was dasselbe, wenn $\mu > 1$. Sind dagegen, entsprechend dem Falle $\mu = 1$, sämmtliche ϱ, σ gleich 0, so hat jedes Glied der Summe den Werth 1, die ganze Summe also den Werth n.

4) Es ist stets:

$$c_{\mu 1} c_{1\mu'} + c_{\mu 2} c_{2\mu'} + \cdots + c_{\mu n} c_{n\mu'} = \begin{matrix} 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \mu', \\ n, \text{ wenn } \mu = \mu'. \end{matrix}$$

Man hat nämlich mit Rücksicht auf das unter 2) Gefundene:

$$c_{\mu 1} c_{1\mu'} + c_{\mu 2} c_{2\mu'} + \cdots + c_{\mu n} c_{n\mu'} = c_{\mu'' 1} + c_{\mu'' 2} + \cdots + c_{\mu'' n},$$

wobei $\mu'' > 1$, wenn $\mu \lessgtr \mu'$, dagegen $\mu'' = 1$, wenn $\mu = \mu'$. Die rechts stehende Summe besitzt aber nach dem unter 3) Gefundenen den Werth 0, wenn $\mu'' > 1$, dagegen den Werth n, wenn $\mu'' = 1$, womit die aufgestellte Gleichung bewiesen ist.

Schreibt man jetzt in der zuletzt aufgestellten Gleichung statt des Buchstabens μ' den Buchstaben ν, so erhält man die Relationen:

$$c_{\mu 1} c_{1\nu} + c_{\mu 2} c_{2\nu} + \cdots + c_{\mu n} c_{n\nu} = \begin{matrix} 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \\ n, \text{ wenn } \mu = \nu, \end{matrix} \qquad \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n;$$

und erkennt, dass aus den Grössen $c_{\mu\nu}$, indem man eine jede derselben durch $\sqrt{n} = +\delta^p$ theilt, Grössen $c_{\mu\nu}$ hervorgehen, die als Coefficienten eines involutorischen Systems betrachtet werden können. Mit anderen Worten, die Gleichungen:

$$(A)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_{1\nu}x_\nu = \sqrt{n}\,x'_1, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_{2\nu}x_\nu = \sqrt{n}\,x'_2, \quad \ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_{n\nu}x_\nu = \sqrt{n}\,x'_n$$

ziehen immer die Gleichungen:

$$(B)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_{1\nu}x'_\nu = \sqrt{n}\,x_1, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_{2\nu}x'_\nu = \sqrt{n}\,x_2, \quad \ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_{n\nu}x'_\nu = \sqrt{n}\,x_n$$

nach sich, oder, was dasselbe, es können in den Gleichungen (A) und daher auch in allen ausschliesslich auf Grund derselben abgeleiteten Formeln, unbeschadet der Richtigkeit, die Grössen x mit den Grössen x' beziehlich vertauscht werden.

Was die aus den Grössen $c_{\mu\nu}$ gebildete Determinante $\Delta = \Sigma \pm c_{11}c_{22}\ldots c_{nn}$ betrifft, so ergibt sich unmittelbar aus dem in Art. 1 über die Determinante eines involutorischen Systems Gesagten, dass ihr Quadrat den Werth n^n besitzt.

3.

Die $n = 2^q$ Zahlencomplexe, welche aus dem Symbole:

$$(\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\ldots\,\varepsilon_q)$$

hervorgehen, wenn man darin an Stelle des Systems der q Buchstaben $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$ der Reihe nach die 2^q Variationen der Elemente 0, 1 zur q^{ten} Classe mit Wiederholung treten lässt, sollen ebenfalls Charakteristiken genannt werden. Bringt man diese n Charakteristiken in eine bestimmte, willkürlich wählbare, der Einfachheit wegen mit der Charakteristik $(0) = (0\,0\ldots 0)$ beginnende Reihenfolge, so kommt jeder dieser n Charakteristiken eine bestimmte Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ als Stellenzahl zu, speciell der Charakteristik (0) die Zahl 1. Man bezeichne nun mit:

$$(\varepsilon) = (\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\ldots\,\varepsilon_q), \qquad\qquad (\eta) = (\eta_1\,\eta_2\,\ldots\,\eta_q)$$

irgend zwei dieser n Charakteristiken, mit ν die Stellenzahl der ersten, mit μ die Stellenzahl der zweiten und bilde aus den Elementen der beiden Charakteristiken den Ausdruck:

$$c_{\mu\nu} = (-1)^{\varepsilon_1\eta_q + \varepsilon_2\eta_{q-1} + \cdots + \varepsilon_{q-1}\eta_2 + \varepsilon_q\eta_1}.$$

Lässt man dann mit Rücksicht auf denselben sowohl für die Charakteristik (ε) als auch, unabhängig davon, für die Charakteristik (η) eine jede der n Charakteristiken treten, so erhält man im Ganzen n^2 Grössen $c_{\mu\nu}$, die man der besseren Uebersicht wegen in die folgende quadratische Tabelle zusammenstelle:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & (0) & \cdot\;\cdot\;\cdot & (\varepsilon) & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\
\hline
(0) & c_{11} & \cdot\;\cdot\;\cdot & c_{1\nu} & \cdot\;\cdot\;\cdot & c_{1n} \\
\vdots & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\
(\eta) & c_{\mu 1} & \cdot\;\cdot\;\cdot & c_{\mu\nu} & \cdot\;\cdot\;\cdot & c_{\mu n} \\
\vdots & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\
\cdot & c_{n1} & \cdot\;\cdot\;\cdot & c_{n\nu} & \cdot\;\cdot\;\cdot & c_{nn}
\end{array}$$

Sowohl über der Tabelle wie links davon hat man sich die sämmtlichen n Charakteristiken in der gewählten Reihenfolge angeschrieben zu denken, so dass links von $c_{\mu\nu}$ die der Stellenzahl μ, über $c_{\mu\nu}$ die der Stellenzahl ν entsprechende Charakteristik steht.

Das so definirte System der Grössen c besitzt dann die folgenden Eigenschaften:

1) Für jeden Werth von μ und ν ist $c_{\mu\nu}^2 = 1,\ c_{\mu 1} = 1,\ c_{1\nu} = 1,\ c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$.

2) Sind (η), (η') irgend zwei verschiedene Charakteristiken, denen die Stellenzahlen μ, μ' beziehlich zukommen, und versteht man unter der Summe $(\eta) + (\eta')$ dieser beiden Charakteristiken diejenige (immer von (0) verschiedene) Charakteristik (η''), deren Elemente für jeden Index $\varkappa$ durch die Congruenz $\eta''_\varkappa \equiv \eta_\varkappa + \eta'_\varkappa \pmod{2}$ bestimmt sind, so ist stets:

$$(-1)^{\varepsilon_1\eta_q + \varepsilon_2\eta_{q-1} + \cdots + \varepsilon_q\eta_1} \times (-1)^{\varepsilon_1\eta'_q + \varepsilon_2\eta'_{q-1} + \cdots + \varepsilon_q\eta'_1} = (-1)^{\varepsilon_1\eta''_q + \varepsilon_2\eta''_{q-1} + \cdots + \varepsilon_q\eta''_1},$$

und daher auch, wenn man die zu (η'') gehörige Stellenzahl mit μ'', wobei dann immer $\mu'' > 1$, bezeichnet, für jeden Index ν:

$$c_{\mu\nu}\, c_{\mu'\nu} = c_{\mu''\nu}.$$

Man erhält daher aus irgend zwei Horizontalreihen des Systems der Grössen c immer wieder eine Horizontalreihe desselben, wenn man jedes Glied der einen mit dem ihm entsprechenden der anderen multiplicirt, und es entspricht einer solchen auf zwei Horizontalreihen bezüglichen Multiplication stets die Addition der beiden den Horizontalreihen entsprechenden Charakteristiken. Dasselbe gilt auch für irgend zwei Verticalreihen.

3) Es ist:

$$c_{\mu 1} + c_{\mu 2} + \cdots + c_{\mu n} = \begin{matrix} 0, \text{ wenn } \mu > 1, \\ n, \text{ wenn } \mu = 1. \end{matrix}$$

Man hat nämlich zunächst:

$$c_{\mu 1} + c_{\mu 2} + \cdots + c_{\mu n} = \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q}^{0,\,1} (-1)^{\varepsilon_1\eta_q + \varepsilon_2\eta_{q-1} + \cdots + \varepsilon_q\eta_1},$$

wobei die Summation so auszuführen ist, dass sämmtliche q Summationsbuchstaben $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$ unabhängig von einander die Werthe 0 und 1 annehmen, die Charakteristik (ε) also die Reihe der n Charakteristiken durchläuft. Aendert man einen dieser Summationsbuchstaben, z. B. ε_λ, um 1, ersetzt also im allgemeinen Gliede der die

rechte Seite bildenden Summe ε_λ durch $\varepsilon_\lambda + 1$, so wird dadurch nur die Anordnung der Summanden geändert, der Werth der Summe selbst jedoch in keiner Weise alterirt. Anderseits aber erlangt das allgemeine Glied der Summe bei Aenderung von ε_λ um 1 den Factor $(-1)^{\eta_{q-\lambda+1}}$, der, da er von den Summationsbuchstaben ε unabhängig ist, von der ganzen Summe angenommen wird. Da dies für $\lambda = 1, 2, \ldots, q$ gilt, so folgt, dass die obige Summe den Werth 0 besitzt, wenn auch nur eine der Grössen η von 0 verschieden ist, oder, was dasselbe, wenn $\mu > 1$. Sind dagegen, entsprechend dem Falle $\mu = 1$, sämmtliche ε gleich 0, so hat jedes Glied der Summe den Werth 1, die ganze Summe also den Werth n.

4) Es ist stets:

$$c_{\mu 1} c_{\mu' 1} + c_{\mu 2} c_{\mu' 2} + \cdots + c_{\mu n} c_{\mu' n} = \begin{matrix} 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \mu', \\ n, \text{ wenn } \mu = \mu'. \end{matrix}$$

Man hat nämlich mit Rücksicht auf das unter 2) Gefundene:

$$c_{\mu 1} c_{\mu' 1} + c_{\mu 2} c_{\mu' 2} + \cdots + c_{\mu n} c_{\mu' n} = c_{\mu'' 1} + c_{\mu'' 2} + \cdots + c_{\mu'' n},$$

wobei $\mu'' > 1$, wenn $\mu \gtrless \mu'$, dagegen $\mu'' = 1$, wenn $\mu = \mu'$. Die rechts stehende Summe besitzt aber nach dem unter 3) Gefundenen den Werth 0, wenn $\mu'' > 1$, dagegen den Werth n, wenn $\mu'' = 1$, womit die aufgestellte Gleichung als richtig bewiesen ist.

Schreibt man jetzt in der zuletzt aufgestellten Gleichung statt des Buchstabens μ' den Buchstaben ν, so erhält man die Relationen:

$$c_{\mu 1} c_{\nu 1} + c_{\mu 2} c_{\nu 2} + \cdots + c_{\mu n} c_{\nu n} = \begin{matrix} 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \\ n, \text{ wenn } \mu = \nu, \end{matrix} \qquad \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Berücksichtigt man dann noch, dass, wie schon unter 1) erwähnt wurde, $c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$ ist, so erkennt man, dass aus den Grössen $c_{\mu\nu}$, indem man eine jede derselben durch $\sqrt{n} = +2^{\frac{q}{2}}$ theilt, Grössen $e_{\mu\nu}$ hervorgehen, die als Coefficienten eines orthogonalen involutorischen Systems betrachtet werden können. Die Gleichungen:

$$(A) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_{1\nu} x_\nu = \sqrt{n}\, x'_1, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_{2\nu} x_\nu = \sqrt{n}\, x'_2, \quad \ldots\ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_{n\nu} x_\nu = \sqrt{n}\, x'_n$$

ziehen daher immer die Gleichungen:

$$(B) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_{1\nu} x'_\nu = \sqrt{n}\, x_1, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_{2\nu} x'_\nu = \sqrt{n}\, x_2, \quad \ldots\ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_{n\nu} x'_\nu = \sqrt{n}\, x_n$$

nach sich, oder, was dasselbe, es können in den Gleichungen (A) und daher auch in allen ausschliesslich auf Grund derselben abgeleiteten Formeln, unbeschadet der Richtigkeit, die Grössen x mit den Grössen x' beziehlich vertauscht werden.

Was die aus den Grössen $c_{\mu\nu}$ gebildete Determinante $\Delta = \Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{nn}$ betrifft, so ergibt sich unmittelbar aus dem in Art. 1 über die Determinante eines involutorischen Systems Gesagten, dass ihr Quadrat den Werth n^n besitzt.

4.

Das System der im vorigen Artikel aufgestellten Grössen c ist in gewissem Sinne abhängig von der für die n Charakteristiken gewählten Reihenfolge. Dasselbe nimmt eine ungemein übersichtliche Gestalt an, wenn man die n Charakteristiken in eine gewisse, sogleich anzugebende Reihenfolge bringt, welche man nicht unpassend die **natürliche** nennen kann.

Um die erwähnte Anordnung zu erhalten, verstehe man unter $(\varphi_1), (\varphi_2), \ldots, (\varphi_q)$ die q speciellen Charakteristiken:

$$(\varphi_1) = (100\ldots00), \quad (\varphi_2) = (010\ldots00), \quad \ldots\ldots, \quad (\varphi_q) = (000\ldots01),$$

allgemein also unter $(\varphi_\varkappa)$ diejenige Charakteristik, in welcher das $\varkappa^{\text{te}}$ Element den Werth 1 besitzt, alle übrigen dagegen den Werth 0 haben, denke sich dann auf Grund der Gleichung:

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_q) = \varepsilon_1 \cdot (\varphi_1) + \varepsilon_2 \cdot (\varphi_2) + \cdots + \varepsilon_q \cdot (\varphi_q)$$

aus $(\varphi_1), (\varphi_2), \ldots, (\varphi_q)$ als Fundamentalcharakteristiken die sämmtlichen n Charakteristiken zusammengesetzt und ordne dieselben nach dem Schema:

$$(\Phi) \quad \begin{array}{l} (0),\ (\varphi_1), \mid (\varphi_2),\ (\varphi_1)+(\varphi_2), \mid (\varphi_3),\ (\varphi_1)+(\varphi_3),\ (\varphi_2)+(\varphi_3),\ (\varphi_1)+(\varphi_2)+(\varphi_3), \mid \\ (\varphi_4),\ (\varphi_1)+(\varphi_4),\ (\varphi_2)+(\varphi_4),\ \ldots\ldots,\ (\varphi_1)+(\varphi_2)+(\varphi_3)+(\varphi_4), \mid (\varphi_5),\ (\varphi_1)+(\varphi_5),\ \ldots\ldots \end{array}$$

welches dadurch charakterisirt ist, dass für $\varkappa = 1, 2, \ldots, q$ aus den ersten $2^{\varkappa-1}$ Charakteristiken durch Addition der Charakteristik $(\varphi_\varkappa)$ zu einer jeden derselben die folgenden $2^{\varkappa-1}$ der Reihe nach hervorgehen. Die durch das Schema (Φ) bestimmte Reihenfolge der n Charakteristiken soll nun die **natürliche** genannt werden. Bei ihr entspricht allgemein der Charakteristik $(\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_q)$ die Zahl:

$$\nu = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cdot 2 + \varepsilon_3 \cdot 2^2 + \cdots + \varepsilon_q \cdot 2^{q-1}$$

als Stellenzahl, speciell der Fundamentalcharakteristik $(\varphi_\varkappa)$ die Zahl $1 + 2^{\varkappa-1}$.

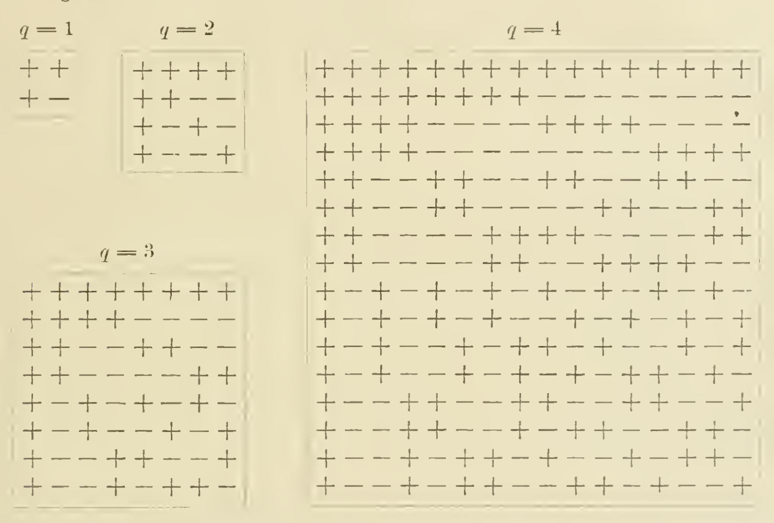
Unter Zugrundelegung der gewählten Reihenfolge der Charakteristiken erhält man die der Charakteristik (η) entsprechende Horizontalreihe des Systems der Grössen c — die μ^{te}, wenn μ die Stellenzahl der Charakteristik (η) ist — in der Form:

$$\begin{array}{l} 1,\ (-1)^{\eta_q}, \mid (-1)^{\eta_{q-1}},\ (-1)^{\eta_q+\eta_{q-1}}, \mid (-1)^{\eta_{q-2}},\ (-1)^{\eta_q+\eta_{q-2}},\ (-1)^{\eta_{q-1}+\eta_{q-2}},\ (-1)^{\eta_q+\eta_{q-1}+\eta_{q-2}}, \mid \\ (-1)^{\eta_{q-3}},\ (-1)^{\eta_q+\eta_{q-3}},\ (-1)^{\eta_{q-1}+\eta_{q-3}},\ \ldots\ldots,\ (-1)^{\eta_q+\eta_{q-1}+\eta_{q-2}+\eta_{q-3}}, \mid (-1)^{\eta_{q-4}},\ \ldots\ldots \end{array}$$

und erkennt sofort die Analogie, welche zwischen dem Bildungsgesetze dieses Schemas und dem des früheren (Φ) besteht. Sehr einfach gestalten sich die den q Fundamentalcharakteristiken $(\varphi_1), (\varphi_2), \ldots, (\varphi_q)$ entsprechenden Horizontalreihen; allgemein haben bei der, der Charakteristik $(\varphi_\varkappa)$ entsprechenden, $\overline{2^{\varkappa-1}+1}^{\text{ten}}$ Horizontalreihe die ersten $2^{q-\varkappa}$ Elemente den Werth $+1$, die darauf folgenden $2^{q-\varkappa}$ den Werth -1, die nächsten

$2^{q-\varkappa}$ wieder den Werth $+1$ u. s. w. Sind diese ausgezeichneten Horizontalreihen einmal aufgestellt, so kann man aus ihnen ohne Mühe jede beliebige Horizontalreihe erzeugen, indem man berücksichtigt, dass aus zwei, den Charakteristiken (η), (η') beziehlich entsprechenden Horizontalreihen des Systems die der Charakteristik $(\eta'') = (\eta) + (\eta')$ entsprechende Horizontalreihe entsteht, wenn man jedes Glied der einen mit dem ihm entsprechenden der anderen multiplicirt.

Die nachstehenden, den Werthen $q = 1, 2, 3, 4$ entsprechenden Systeme der Grössen c mögen das Gesagte veranschaulichen. Es sind dabei, der Einfachheit wegen, an Stelle der für die c auftretenden Zahlen $+1$, -1 nur die betreffenden Vorzeichen $+$, $-$ gesetzt.



$q = 1$

+	+
+	−

$q = 2$

+	+	+	+
+	+	−	−
+	−	+	−
+	−	−	+

$q = 3$

+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	−	−	−	−
+	+	−	−	+	+	−	−
+	+	−	−	−	−	+	+
+	−	+	−	+	−	+	−
+	−	+	−	−	+	−	+
+	−	−	+	+	−	−	+
+	−	−	+	−	+	+	−

$q = 4$

+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−
+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−
+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+
+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−
+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+
+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+
+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−
+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+
+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−
+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+
+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−
+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−
+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+

Bezeichnet man die n Charakteristiken durch die bei der natürlichen Reihenfolge (Φ) ihnen zukommenden Stellenzahlen, so kann auch leicht eine Tabelle für die Addition der Charakteristiken entworfen werden. Dem Falle $q = 4$ z. B. entspricht die auf der folgenden Seite stehende Tabelle. Bei ihr ist in das der μ^{ten} Horizontalreihe und ν^{ten} Verticalreihe gemeinsam angehörende Quadrat die Stellenzahl derjenigen Charakteristik aufgenommen, welche die Summe der den Stellenzahlen μ und ν entsprechenden Charakteristiken repräsentirt. Entnimmt man dieser Tabelle jene kleineren in ihr enthaltenen quadratischen Tabellen, welche aus den den ersten 2, 4, 8 Horizontalreihen und Verticalreihen gemeinsamen Quadraten beziehlich bestehen, so erhält man die den Fällen $q = 1, 2, 3$ entsprechenden Additionstabellen; auch erkennt man leicht, wie man die Tabelle fortzusetzen hat, um zu den den Fällen $q = 5, 6, \ldots$ entsprechenden Additionstabellen zu gelangen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15
3	4	1	2	7	8	5	6	11	12	9	10	15	16	13	14
4	3	2	1	8	7	6	5	12	11	10	9	16	15	14	13
5	6	7	8	1	2	3	4	13	14	15	16	9	10	11	12
6	5	8	7	2	1	4	3	14	13	16	15	10	9	12	11
7	8	5	6	3	4	1	2	15	16	13	14	11	12	9	10
8	7	6	5	4	3	2	1	16	15	14	13	12	11	10	9
9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8
10	9	12	11	14	13	16	15	2	1	4	3	6	5	8	7
11	12	9	10	15	16	13	14	3	4	1	2	7	8	5	6
12	11	10	9	16	15	14	13	4	3	2	1	8	7	6	5
13	14	15	16	9	10	11	12	5	6	7	8	1	2	3	4
14	13	16	15	10	9	12	11	6	5	8	7	2	1	4	3
15	16	13	14	11	12	9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Zwischen dem zur Zahl q gehörigen Systeme der Grössen c und der derselben Zahl entsprechenden Additionstabelle der Charakteristiken besteht ein eigenthümlicher Zusammenhang, über den man in einer Arbeit des Herrn *Puchta**) das Nähere findet.

Der Fall, wo q eine gerade Zahl ist, $q = 2p$, hat für das Folgende eine besondere Bedeutung und soll desshalb hier noch etwas eingehender behandelt werden. In diesem Falle kann man nämlich an Stelle der einreihigen Charakteristiken zweireihige einführen, indem man bei den Charakteristiken $(\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{2p})$, $(\eta_1\, \eta_2 \ldots \eta_{2p})$:

$$\varepsilon_{p+1} = \varepsilon'_p, \quad \varepsilon_{p+2} = \varepsilon'_{p-1}, \quad \ldots\ldots, \quad \varepsilon_{2p} = \varepsilon'_1,$$

$$\eta_{p+1} = \eta'_p, \quad \eta_{p+2} = \eta'_{p-1}, \quad \ldots\ldots, \quad \eta_{2p} = \eta'_1,$$

setzt und dann:

$$(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p\, \varepsilon'_p \ldots \varepsilon'_1) \text{ durch } \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_p \end{bmatrix}, \quad (\eta_1 \ldots \eta_p\, \eta'_p \ldots \eta'_1) \text{ durch } \begin{bmatrix} \eta_1 \ldots \eta_p \\ \eta'_1 \ldots \eta'_p \end{bmatrix}$$

---

*) *Puchta,* Ein Determinantensatz und seine Umkehrung. Denkschriften der math.-naturw. Classe der Wiener Akademie, Bd. XXXVIII, 1878. Vergl. auch: *Nöther,* Notiz über eine Classe symmetrischer Determinanten. Math. Annalen, Bd. XVI, pag. 551. Ebenso: *Gegenbauer,* Ueber eine specielle symmetrische Determinante. Sitzungsberichte der math.-naturw. Classe der Wiener Akademie, Bd. LXXXII, 1880.

ersetzt. Mit Rücksicht hierauf nimmt jetzt der für $c_{\mu\nu}$ aufgestellte Ausdruck die Gestalt:

$$c_{\mu\nu} = (-1)^{\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}(\varepsilon_\varkappa \eta'_\varkappa + \varepsilon'_\varkappa \eta_\varkappa)}$$

an, und die $2p$ Fundamentalcharakteristiken $(\varphi_1), (\varphi_2), \ldots, (\varphi_{2p})$ erhalten, wenn man das ν-malige Nacheinandervorkommen der Verticalreihe $\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}$ durch $\binom{0}{0}^\nu$ bezeichnet, die Form:

$$\begin{aligned}
[\varphi_1] &= \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\binom{0}{0}^{p-1}\right], & [\varphi_2] &= \left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\binom{0}{0}^{p-2}\right], & \ldots\ldots, && [\varphi_p] &= \left[\binom{0}{0}^{p-1}\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right],\\
[\varphi_{2p}] &= \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\binom{0}{0}^{p-1}\right], & [\varphi_{2p-1}] &= \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\binom{0}{0}^{p-2}\right], & \ldots\ldots, && [\varphi_{p+1}] &= \left[\binom{0}{0}^{p-1}\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right].
\end{aligned}$$

Nennt man eine Charakteristik $\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \ldots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}$ gerade oder ungerade, je nachdem $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \varepsilon_\nu \varepsilon'_\nu \equiv 0 \pmod{2}$, oder $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} \varepsilon_\nu \varepsilon'_\nu \equiv 1 \pmod{2}$ ist, so kann man bei der gewählten Reihenfolge der Charakteristiken leicht die den ungeraden Charakteristiken entsprechenden Stellenzahlen angeben. Lässt man nämlich die Charakteristik $\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \ldots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}$ die aufgestellte Reihe der 2^{2p} Charakteristiken durchlaufen, so nimmt der Ausdruck $(-1)^{\varepsilon_1\varepsilon'_1 + \varepsilon_2\varepsilon'_2 + \cdots + \varepsilon_p\varepsilon'_p}$ der Reihe nach dieselben Werthe an, wie der zur Zahl $q = p$ gehörige Ausdruck $c_{\mu\nu} = (-1)^{\varepsilon_1\eta_p + \varepsilon_2\eta_{p-1} + \cdots + \varepsilon_p\eta_1}$, wenn der Doppelindex $\mu\nu$ sich so ändert, dass der Reihe nach die Grössen $c_{11}, \ldots, c_{1n}, c_{21}, \ldots, c_{2n}, \ldots, c_{n1}, \ldots, c_{nn}$, $n = 2^p$, entstehen. Um also die Stellenzahlen zu finden, die bei der natürlichen Reihenfolge der Charakteristiken von der Form $\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \ldots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}$ den ungeraden Charakteristiken zukommen, nehme man das dem Falle $q = p$ entsprechende quadratische System der Grössen c und bringe durch Aneinanderfügen der n Horizontalreihen desselben die Grössen c in eine einzige Horizontalreihe, so dass in dieser allgemein $c_{\mu\nu}$ an $\overline{(\mu - 1)\, n + \nu}^{\text{ter}}$ Stelle steht; dann sind die Stellenzahlen, welche den den Werth -1 besitzenden Grössen c zukommen, zugleich diejenigen, welche den ungeraden Charakteristiken von der Form $\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \ldots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}$ bei der natürlichen Reihenfolge entsprechen. Beispielsweise findet man aus der oben für $q = 2$ aufgestellten Tabelle, dass den ungeraden Charakteristiken von der Form $\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon'_1 & \varepsilon'_2\end{bmatrix}$ in der natürlichen Reihenfolge die Stellenzahlen 7, 8, 10, 12, 14, 15 zukommen.

5.

Das am Ende des Art. 3 aufgestellte System linearer Gleichungen (A) soll jetzt ausschliesslich unter der Voraussetzung, dass q gerade ist, $q = 2p$, weiter behandelt werden. Dabei sollen durchweg an Stelle der einreihigen Charakteristiken die am Schlusse des vorigen Artikels aufgestellten zweireihigen eingeführt werden, unter Beibehaltung der im Früheren festgesetzten natürlichen Reihenfolge.

Unter dieser Voraussetzung nimmt das System (A) die Gestalt:

$$(S)\qquad \begin{aligned} 2^p x_1' &= c_{11}\,x_1 + \cdots + c_{1\nu}\,x_\nu + \cdots + c_{1n}\,x_n\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2^p x_\mu' &= c_{\mu 1}\,x_1 + \cdots + c_{\mu\nu}x_\nu + \cdots + c_{\mu n}\,x_n\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2^p x_n' &= c_{n1}\,x_1 + \cdots + c_{n\nu}\,x_\nu + \cdots + c_{nn}\,x_n\,, \end{aligned} \qquad n = 2^{2p},$$

an, wobei allgemein:

$$c_{\mu\nu} = (-1)^{\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}(\varepsilon_\varkappa\,\eta'_\varkappa + \varepsilon'_\varkappa\,\eta_\varkappa)}$$

ist, wenn $[\varepsilon] = \begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \cdots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}$ und $[\eta] = \begin{bmatrix}\eta_1 & \cdots & \eta_p\\ \eta'_1 & \cdots & \eta'_p\end{bmatrix}$ diejenigen Charakteristiken sind, welche in der natürlichen Reihenfolge ν und μ beziehlich als Stellenzahlen besitzen, so dass also das System der Coefficienten c dargestellt wird durch das der Zahl $q = 2p$ entsprechende, aus den Zahlen $+\,1$, $-\,1$ gebildete quadratische Schema, dessen Entstehung im Vorigen auseinandergesetzt wurde.

Das aufgestellte Gleichungensystem (S) ist für die Theorie der allgemeinen Thetafunctionen von fundamentaler Bedeutung und soll daher jetzt eingehender untersucht werden. Zu dem Ende empfiehlt es sich eine andere Bezeichnung einzuführen. Allgemein repräsentire man x_ν durch $x_{[\varepsilon]}$, x'_μ durch $x'_{[\eta]}$, wenn $[\varepsilon]$, $[\eta]$, wie oben, die den Stellenzahlen ν, μ in der natürlichen Reihenfolge entsprechenden Charakteristiken sind, und führe gleichzeitig, nachdem man zur Abkürzung:

$$(-1)^{\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}(\varepsilon_\varkappa\,\eta'_\varkappa + \varepsilon'_\varkappa\,\eta_\varkappa)} = (-1)^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$$

gesetzt hat, an Stelle von $c_{\mu\nu}$ den Ausdruck $(-1)^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$ ein. Die μ^{te} Gleichung des obigen Systems nimmt dann die Form:

$$(F)\qquad 2^p\,x'_{[\eta]} = \sum_{[\varepsilon]} (-1)^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}\,x_{[\varepsilon]}\,,$$

an, wobei die Summation über alle Terme zu erstrecken ist, die aus dem allgemeinen Gliede entstehen, indem man an Stelle von $[\varepsilon]$ nacheinander sämmtliche 2^{2p} Charakteristiken in der natürlichen Reihenfolge treten lässt. Aus dieser Gleichung gehen dann die sämmtlichen n Gleichungen des Systems (S) hervor, indem man für $[\eta]$ nacheinander die sämmtlichen 2^{2p} Charakteristiken in der natürlichen Reihenfolge setzt.

Da von jetzt an bis zum Schlusse der Arbeit nur noch zweireihige, aus den Zahlen 0, 1 als Elementen zusammengesetzte Charakteristiken auftreten, so kann für diese, ohne dass dadurch ein Missverständniss zu befürchten wäre, eine abgekürzte Bezeichnung eingeführt werden. Mit Rücksicht auf das schon oben angewandte Zeichen $[\varepsilon]$ sollen weitere der 2^{2p} Charakteristiken durch Zeichen fixirt werden, welche aus $[\varepsilon]$ dadurch entstehen, dass man entweder verschiedene Buchstaben oder denselben Buch-

staben mit verschiedenen Indices an Stelle von ε in die Charakteristikenklammer setzt; die Charakteristik $\left[{0\,0 \ldots 0 \atop 0\,0 \ldots 0}\right]$ möge durch das Zeichen $[0]$ repräsentirt werden. Ferner soll dann die Summe $[\varepsilon] + [\eta]$ irgend zweier Charakteristiken $[\varepsilon]$ und $[\eta]$ abgekürzt durch $[\varepsilon\eta]$, und entsprechend eine aus mehreren Charakteristiken zusammengesetzte Summe von der Form $[\varepsilon] + [\eta] + \cdots + [\omega]$ oder $[\varepsilon_1] + [\varepsilon_2] + \cdots + [\varepsilon_r]$ abgekürzt durch $[\varepsilon\eta \ldots \omega]$ oder $[\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_r]$ beziehlich bezeichnet werden. Dabei ist nicht zu vergessen, dass nach früherer Definition $[\varepsilon] + [\eta]$, und jetzt also $[\varepsilon\eta]$, diejenige Charakteristik $[\zeta]$ aus der Reihe der 2^{2p} Charakteristiken bezeichnet, deren Elemente $\zeta_\varkappa$, $\zeta'_\varkappa$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots, p$ durch die Congruenzen $\zeta_\varkappa \equiv \varepsilon_\varkappa + \eta_\varkappa$, $\zeta'_\varkappa \equiv \varepsilon'_\varkappa + \eta'_\varkappa \pmod{2}$ bestimmt sind.

Unter Anwendung dieser Abkürzungen lassen sich die Gesetze, denen die Symbole von der Form $(-1)^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$ gehorchen, leicht fixiren. Man hat nämlich:

$$(-1)^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]} = (-1)^{[\eta]\,|\,[\varepsilon]}, \quad (-1)^{[\varepsilon]\,|\,[0]} = +1, \quad (-1)^{[\varepsilon]\,|\,[\varepsilon]} = +1,$$

$$(-1)^{[\varepsilon\zeta]\,|\,[\eta\vartheta]} = (-1)^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]} . (-1)^{[\varepsilon]\,|\,[\vartheta]} . (-1)^{[\zeta]\,|\,[\eta]} . (-1)^{[\zeta]\,|\,[\vartheta]}.$$

Der einfacheren Schreibweise wegen sollen von jetzt an bei diesen Symbolen die Charakteristikenklammern unterdrückt werden, so dass beispielsweise $(-1)^{\varepsilon\,|\,\eta}$ an Stelle von $(-1)^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$, $(-1)^{\varepsilon\zeta\,|\,\eta\vartheta}$ an Stelle von $(-1)^{[\varepsilon\zeta]\,|\,[\eta\vartheta]}$ tritt.

Noch sind einige Definitionen für das Folgende nöthig. Irgend m Charakteristiken, unter denen die Charakteristik $[0]$ nicht vorkommt, sollen linearunabhängig genannt werden, wenn keine der Summen, die man aus ihnen als Summanden bilden kann, der Charakteristik $[0]$ gleich ist. Bildet man aus m linearunabhängigen Charakteristiken $[\varepsilon_1], [\varepsilon_2], \ldots, [\varepsilon_m]$ alle Summen von je $2, 3, \ldots, m$ derselben, nimmt auch zu den so entstandenen Charakteristiken die m Charakteristiken $[\varepsilon_1], [\varepsilon_2], \ldots, [\varepsilon_m]$ selbst und die Charakteristik $[0]$ noch hinzu, so erhält man im Ganzen 2^m Charakteristiken:

$$[0], \quad [\varepsilon_1], \,|\, [\varepsilon_2], \quad [\varepsilon_1\,\varepsilon_2], \,|\, [\varepsilon_3], \quad [\varepsilon_1\,\varepsilon_3], \quad [\varepsilon_2\,\varepsilon_3], \quad [\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3], \,|\, [\varepsilon_4], \quad [\varepsilon_1\,\varepsilon_4], \;\ldots\ldots$$

von denen keine zwei einander gleich sind. Ein in dieser Weise gebildetes System von Charakteristiken besitzt dann die Eigenschaft, dass es, abgesehen von der Reihenfolge seiner Charakteristiken, stets in sich selbst übergeht, wenn man zu allen in ihm enthaltenen Charakteristiken eine beliebige derselben addirt, und es kann dasselbe auch umgekehrt durch diese Eigenschaft definirt werden. Bilden nämlich r Charakteristiken ein System von der erwähnten Beschaffenheit, und bezeichnet man mit m die grösste Anzahl von linearunabhängigen Charakteristiken, die man aus demselben herausgreifen kann, entsprechend mit $[\zeta_1], [\zeta_2], \ldots, [\zeta_m]$ solche m herausgegriffene linearunabhängige Charakteristiken, so stellen diese m zusammen mit den Summen von je $2, 3, \ldots, m$ derselben im Ganzen $2^m - 1$ der r Charakteristiken dar, und es kann ausser diesen $2^m - 1$ und der Charakteristik $[0]$, die der Definition zufolge auch in dem Systeme enthalten sein muss, keine weitere Charakteristik mehr darin vorkommen, da im anderen Falle aus den r Charakteristiken mehr als m linearunabhängige herausgegriffen werden könnten. Die Zahl r muss daher mit der Zahl 2^m übereinstimmen, und das System dieser 2^m Cha-

rakteristiken ist von derselben Art, wie das vorher betrachtete, insofern als es sich mit Hülfe der Charakteristiken $[\zeta_1]$, $[\zeta_2]$, ..., $[\zeta_m]$ in derselben Weise aufbauen lässt, wie dieses mit Hülfe der Charakteristiken $[\varepsilon_1]$, $[\varepsilon_2]$, ..., $[\varepsilon_m]$. Jedes derartige System von 2^m Charakteristiken soll nun ein zur Zahl m gehöriges vollständiges System genannt werden, insofern als dasselbe auch dadurch definirt werden kann, dass jede Summe, welche man aus Charakteristiken desselben bilden kann, ebenfalls in ihm vorkommt. Wie leicht ersichtlich, kann man aus einem zur Zahl m gehörigen vollständigen Systeme auf mehrere Weisen m linearunabhängige Charakteristiken auswählen; jedes solche System von m Charakteristiken soll eine Basis des vollständigen Systems genannt werden. Da es im Ganzen nur 2^{2p} verschiedene Charakteristiken gibt, so kann m niemals grösser als $2p$ sein; zur Zahl $m = 2p$ gehört nur ein vollständiges System, dasjenige, welches alle 2^{2p} Charakteristiken enthält; die im vorigen Artikel mit $[\varphi_1]$, $[\varphi_2]$, ..., $[\varphi_{2p}]$ bezeichneten zweireihigen Charakteristiken bilden eine Basis desselben.

Nach diesen Vorbereitungen gehe man auf die für eine beliebige Charakteristik $[\eta]$ geltende Formel:

$$(F) \qquad 2^p x'_{[\eta]} = \sum_{[\varepsilon]} (-1)^{\varepsilon \mid \eta} x_{[\varepsilon]}$$

zurück und setze darin an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach die 2^m Charakteristiken:

$$[\eta a_1], \quad [\eta a_2], \quad \ldots, \quad [\eta a_r], \qquad r = 2^m,$$

indem man unter $[\eta]$ wieder eine beliebige Charakteristik, unter $[a_1]$, $[a_2]$, ..., $[a_r]$ dagegen die 2^m Charakteristiken eines zur Zahl m gehörigen vollständigen Systems versteht, welches die m Charakteristiken $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$, ..., $[\alpha_m]$ als Basis besitzen möge und nach dem Schema:

$$[0], \quad [\alpha_1], \mid [\alpha_2], \quad [\alpha_1 \alpha_2], \mid [\alpha_3], \quad [\alpha_1 \alpha_3], \quad [\alpha_2 \alpha_3], \quad [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3], \mid [\alpha_4], \quad [\alpha_1 \alpha_4], \ldots.$$

geordnet sein soll. Multiplicirt man dann die so entstandenen Gleichungen mit $(-1)^{\zeta \mid a_1}$, $(-1)^{\zeta \mid a_2}$, ..., $(-1)^{\zeta \mid a_r}$ beziehlich, indem man unter $[\zeta]$ ebenfalls eine ganz beliebige Charakteristik versteht, und addirt dieselben, so erhält man zunächst die Gleichung:

$$2^p \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (-1)^{\zeta \mid a_\varrho} x'_{[\eta a_\varrho]} = \sum_{[\varepsilon]} (-1)^{\varepsilon \mid \eta} \left[1 + (-1)^{\varepsilon\zeta \mid \alpha_1}\right] \cdots \left[1 + (-1)^{\varepsilon\zeta \mid \alpha_m}\right] x_{[\varepsilon]},$$

da:

$$(-1)^{\varepsilon\zeta \mid a_1} + (-1)^{\varepsilon\zeta \mid a_2} + \cdots + (-1)^{\varepsilon\zeta \mid a_r} = \left[1 + (-1)^{\varepsilon\zeta \mid \alpha_1}\right] \cdots \left[1 + (-1)^{\varepsilon\zeta \mid \alpha_m}\right]$$

ist. Eine jede der m Grössen $(-1)^{\varepsilon\zeta \mid \alpha_1}$, ..., $(-1)^{\varepsilon\zeta \mid \alpha_m}$, die in dem letzten Producte vorkommen, kann nur den Werth $+1$ oder den Werth -1 haben, und es hat daher das genannte Product nur dann einen von Null verschiedenen Werth, und zwar den Werth 2^m, wenn die m angeführten Grössen sämmtlich den Werth $+1$ besitzen, oder, mit anderen Worten, wenn die betreffende Charakteristik $[\varepsilon]$ die Bedingungen:

$$(-1)^{\varepsilon\zeta \mid \alpha_1} = +1, \quad (-1)^{\varepsilon\zeta \mid \alpha_2} = +1, \quad \ldots, \quad (-1)^{\varepsilon\zeta \mid \alpha_m} = +1$$

erfüllt. Alle diesen Bedingungen genügenden Charakteristiken $[\varepsilon]$ erhält man aber, indem man zu den sämmtlichen Lösungen $[\xi]$ des Gleichungensystems:

$$(-1)^{\xi|\alpha_1} = +1, \quad (-1)^{\xi|\alpha_2} = +1, \quad \ldots\ldots, \quad (-1)^{\xi|\alpha_m} = +1$$

die Charakteristik $[\zeta]$ addirt.

Da die m Charakteristiken $[\alpha_1], [\alpha_2], \ldots, [\alpha_m]$ linearunabhängig sind, so gibt es, nach der Lehre von den linearen Congruenzen*), unter den sämmtlichen 2^{2p} Charakteristiken im Ganzen $s = 2^{2p-m}$ Charakteristiken, von denen jede, an Stelle von ξ gesetzt, den aufgestellten Gleichungen genügt, und von denen eine immer die Charakteristik $[0]$ ist. Dieselben sollen in einer später festzusetzenden Reihenfolge mit:

$$[b_1], [b_2], \ldots, [b_s], \qquad s = 2^{2p-m},$$

bezeichnet werden. Berücksichtigt man dann, dass die Summe $[b_\lambda b_\mu]$ irgend zweier dieser Charakteristiken ebenfalls eine Lösung der aufgestellten Gleichungen ist, also gleichfalls dem Systeme der Charakteristiken $[b]$ angehört, so erkennt man, dass die 2^{2p-m} Charakteristiken $[b]$ ein zur Zahl $2p - m$ gehöriges vollständiges System bilden.

Nachdem dieses festgestellt, bezeichne man mit $[\beta_1], [\beta_2], \ldots, [\beta_{2p-m}]$ eine Basis dieses Systems und fixire die 2^{2p-m} Charakteristiken desselben in der Reihenfolge:

$$[0], \; [\beta_1], | \, [\beta_2], \; [\beta_1\beta_2], | \, [\beta_3], \; [\beta_1\beta_3], \; [\beta_2\beta_3], \; [\beta_1\beta_2\beta_3], | \, [\beta_4], \; [\beta_1\beta_4], \; \ldots\ldots$$

durch die schon oben eingeführten Symbole $[b_1], [b_2], \ldots, [b_s]$. Da je $2p - m$ linearunabhängige Charakteristiken $[b]$ und nur solche $2p - m$ eine Basis des Systems bilden, so reducirt sich mit Rücksicht auf die vorhergegangene Definition der Charakteristiken $[b]$ die Bestimmung einer Basis des Systems auf die Bestimmung von $2p - m$ linearunabhängigen den Gleichungen:

$$(-1)^{\xi|\alpha_1} = +1, \quad (-1)^{\xi|\alpha_2} = +1, \quad \ldots\ldots, \quad (-1)^{\xi|\alpha_m} = +1$$

genügenden Charakteristiken $[\xi] = [\beta_1], [\beta_2], \ldots, [\beta_{2p-m}]$.

Bildet man jetzt die 2^{2p-m} Charakteristiken:

$$[\zeta b_1], \quad [\zeta b_2], \quad \ldots, \quad [\zeta b_s],$$

so repräsentiren dieselben nach dem vorher Bemerkten die sämmtlichen Lösungen des oben für $[\varepsilon]$ aufgestellten Gleichungensystems. Auf der rechten Seite der früheren, aus (F) abgeleiteten Gleichung bleiben daher nur diejenigen Glieder stehen, für welche $[\varepsilon] = [\zeta b_1], [\zeta b_2], \ldots, [\zeta b_s]$ ist, und man erhält so schliesslich nach einfacher Umformung die neue Gleichung:

$$(F') \qquad 2^{p-m} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (-1)^{\zeta|a_\varrho} x'_{\eta a_\varrho} = (-1)^{\eta|\zeta} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} (-1)^{\eta|b_\sigma} x_{\zeta b_\sigma} .$$

In dieser Gleichung (F') kann nun sowohl für $[\eta]$ wie für $[\zeta]$ eine jede der 2^{2p} Charakteristiken gesetzt werden. Es entstehen aber auf diese Weise im Ganzen nur 2^{2p} verschiedene Gleichungen, wie die folgende Ueberlegung zeigt.

*) Vergl. hierzu: *Frobenius*, Ueber das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variabeln. Crelle's Journal, Bd. 89, pag. 190, Satz I.

Man ergänze zunächst das System der m Charakteristiken $[\alpha_1], [\alpha_2], \ldots, [\alpha_m]$ durch Hinzunahme von $2p-m$, auf mehrere Weisen bestimmbaren, Charakteristiken $[\alpha'_1], [\alpha'_2], \ldots, [\alpha'_{2p-m}]$ zu einem Systeme von $2p$ linearunabhängigen Charakteristiken, entsprechend das System der $2p-m$ Charakteristiken $[\beta_1], [\beta_2], \ldots, [\beta_{2p-m}]$ durch Hinzunahme vom m passend gewählten Charakteristiken $[\beta'_1], [\beta'_2], \ldots, [\beta'_m]$ gleichfalls zu einem Systeme von $2p$ linearunabhängigen und bilde dann sowohl das zu $[\alpha'_1], [\alpha'_2], \ldots, [\alpha'_{2p-m}]$ als Basis gehörige vollständige System:

$$[0],\ [\alpha'_1],\ |\ [\alpha'_2],\ [\alpha'_1\alpha'_2],\ |\ [\alpha'_3],\ [\alpha'_1\alpha'_3],\ [\alpha'_2\alpha'_3],\ [\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3],\ |\ [\alpha'_4],\ [\alpha'_1\alpha'_4],\ \ldots\ldots$$

dessen Charakteristiken in der vorliegenden Reihenfolge mit:

$$[a'_1],\quad [a'_2],\quad \ldots,\quad [a'_s],\qquad s = 2^{2p-m},$$

bezeichnet werden sollen, wie auch das zu $[\beta'_1], [\beta'_2], \ldots, [\beta'_m]$ als Basis gehörige vollständige System:

$$[0],\ [\beta'_1],\ |\ [\beta'_2],\ [\beta'_1\beta'_2],\ |\ [\beta'_3],\ [\beta'_1\beta'_3],\ [\beta'_2\beta'_3],\ [\beta'_1\beta'_2\beta'_3],\ |\ [\beta'_4],\ [\beta'_1\beta'_4],\ \ldots\ldots$$

dessen Charakteristiken in der vorliegenden Reihenfolge mit:

$$[b'_1],\quad [b'_2],\quad \ldots,\quad [b'_r],\qquad r = 2^m,$$

bezeichnet werden sollen. Da sowohl die $2p$ Charakteristiken $[\alpha_1], [\alpha_2], \ldots, [\alpha_m], [\alpha'_1], [\alpha'_2], \ldots, [\alpha'_{2p-m}]$ als auch die $2p$ Charakteristiken $[\beta_1], [\beta_2], \ldots, [\beta_{2p-m}], [\beta'_1], [\beta'_2], \ldots, [\beta'_m]$ eine Basis desjenigen vollständigen Systems, welches alle 2^{2p} Charakteristiken enthält, bilden, so erhält man sämmtliche 2^{2p} Charakteristiken, und zwar jede nur einmal, sowohl, wenn man in der Summe $[a_\varkappa a'_\lambda]$, als auch, wenn man in der Summe $[b_\lambda b'_\varkappa]$ die Zahl $\varkappa$ die Werthe $1, 2, \ldots, r$ und unabhängig davon die Zahl λ die Werthe $1, 2, \ldots, s$ annehmen lässt. Berücksichtigt man nun, dass sowohl beim Uebergange von $[\eta]$ in $[\eta a_\varkappa]$ wie auch beim Uebergange von $[\zeta]$ in $[\zeta b_\lambda]$ die Formel (F''), abgesehen von der Anordnung der Summanden und einem im ersten Falle hinzutretenden, allen Gliedern gemeinsamen Factor, wieder in sich selbst übergeht, so erkennt man, dass einerseits $[\eta] = [a_\varkappa a'_\lambda]$ dieselbe Formel wie $[\eta] = [a'_\lambda]$, anderseits $[\zeta] = [b_\lambda b'_\varkappa]$ dieselbe Formel wie $[\zeta] = [b'_\varkappa]$ liefert, und dass man daher sämmtliche in (F'') enthaltenen speciellen Gleichungen gewinnt, wenn man an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach die Charakteristiken $[a'_1], [a'_2], \ldots, [a'_s]$ und unabhängig davon an Stelle von $[\zeta]$ der Reihe nach die Charakteristiken $[b'_1], [b'_2], \ldots, [b'_r]$ treten lässt. Das System dieser $rs = 2^{2p}$ Gleichungen soll mit (S') bezeichnet und der Einfachheit wegen durch:

$$(S')\qquad 2^{p-m}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}(-1)^{|b'_\varkappa|\,|a_\varrho|}\,x'_{[a'_\lambda a_\varrho]} = (-1)^{|a'_\lambda|\,|b'_\varkappa|}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s}(-1)^{|a'_\lambda|\,|b_\sigma|}\,x_{[b'_\varkappa b_\sigma]},$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots, r,\qquad \lambda = 1, 2, \ldots, s,$$

fixirt werden.

Mit Rücksicht auf spätere Untersuchungen mag hier noch bemerkt werden, dass dasselbe System von Gleichungen, abgesehen von der Aufeinanderfolge der Gleichungen und der Anordnung der einzelnen Glieder in denselben, ebenfalls erhalten wird, wenn man, unter $[\bar\eta]$, $[\bar\zeta]$ zwei beliebig gewählte feste Charakteristiken verstanden,

in (F'') an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach die Charakteristiken $[\bar{\eta} a'_1]$, $[\bar{\eta} a'_2]$, ..., $[\bar{\eta} a'_r]$ setzt und dann in jeder so entstandenen Formel an Stelle von $[\zeta]$ der Reihe nach die Charakteristiken $[\bar{\zeta} b'_1]$, $[\bar{\zeta} b'_2]$, ..., $[\bar{\zeta} b'_r]$ treten lässt.

Die 2^{2p} Gleichungen des Systems (S') können in $s = 2^{2p-m}$ Gruppen von je $r = 2^m$ Gleichungen eingetheilt werden, indem man zu einer Gruppe alle diejenigen Gleichungen zusammenfasst, für welche λ denselben Werth besitzt, und die sich daher nur durch verschiedene Werthe von $\varkappa$ unterscheiden. In einer solchen Gruppe treten auf der linken Seite jeder Gleichung immer dieselben 2^m Grössen x' auf, jedesmal mit anderen Vorzeichen $\pm$ versehen, während irgend zwei rechte Seiten dieser Gleichungen niemals eine Grösse x gemeinsam haben, und die rechten Seiten zusammengenommen demnach die sämmtlichen 2^{2p} Grössen x, aber jede nur einmal, enthalten. Aus jeder solchen Gruppe kann man dann durch passende Verbindung der ihr angehörigen Gleichungen rückwärts diejenigen 2^m Gleichungen des ursprünglichen Systems (S) erhalten, deren linke Seiten, abgesehen von dem Factor 2^p, von den auf den linken Seiten der Gleichungen der Gruppe vorkommenden Grössen x' gebildet werden, und die auch ausschliesslich bei der Herstellung der Gleichungen der Gruppe auf Grund der Formel (F) in Betracht kommen. Entsprechend kann das ganze System (S') das ursprüngliche System (S), aus dem es abgeleitet wurde, in jeder Hinsicht ersetzen, insofern als man durch passende Verbindung der 2^{2p} Gleichungen des Systems (S') rückwärts wieder die 2^{2p} Gleichungen des Systems (S) erhalten kann. Das System (S) selbst kann als ein specielles, dem Werthe $m = 0$ entsprechendes System (S') angesehen werden.

Wie aus der durchgeführten Untersuchung hervorgeht, ist das System (S'), wenn man von der Aufeinanderfolge der Gleichungen und der Anordnung der Glieder in denselben absieht, vollständig bestimmt, sobald das System der 2^m Charakteristiken $[a_1]$, $[a_2]$, ..., $[a_r]$, das als Repräsentant eines beliebigen zur Zahl m gehörigen vollständigen Systems angesehen werden kann, fixirt ist. Da aber auch umgekehrt zu jedem Systeme (S') sich nur auf eine Weise 2^m, $m \overline{<} 2p$, Charakteristiken bestimmen lassen, welche die Rolle der 2^m Charakteristiken $[a_1]$, $[a_2]$, ..., $[a_r]$ übernehmen können, so folgt, dass die Anzahl aller möglichen Systeme (S') mit der Anzahl aller möglichen, zu den Zahlen 0, 1, 2, ..., $2p$ gehörigen, vollständigen Systeme von Charakteristiken übereinstimmt. Handelt es sich um die wirkliche Herstellung der verschiedenen Systeme (S'), so sind dazu noch Betrachtungen über die Beziehungen der Charakteristiken untereinander erforderlich, Betrachtungen, wie sie auf Grund der Lehre von den linearen Congruenzen für specielle Fälle Herr *Frobenius* in seiner schon mehrfach citirten Arbeit angestellt hat. Die vollständige Durchführung dieser Untersuchungen für den Fall $p = 2$ findet sich in der schon in der Einleitung erwähnten Arbeit des Herrn *Krazer*.

6.

In den Untersuchungen des vorigen Artikels bezeichneten die x, x' Grössen, welche den Gleichungen (S) genügen mussten, im Uebrigen aber willkürlich gewählt

werden konnten. Es soll jetzt das System (S) unter der Voraussetzung untersucht werden, dass gewisse der Grössen x', deren zugehörige Charakteristiken einer bestimmten Bedingung genügen, den Werth Null haben. Den Anlass zu dieser Specialisirung des Systems (S) geben, wie im Schlussartikel sich zeigen wird, die Eigenschaften der zu den hyperelliptischen Integralen gehörigen Thetafunctionen, und entsprechend bilden die bei der Betrachtung der hyperelliptischen Integrale auftretenden, in der vorhergehenden Arbeit ausführlich behandelten Charakteristikensysteme die zur Untersuchung des specialisirten Systems (S) hinreichenden Hülfsmittel. Hier mögen von diesen Charakteristensystemen diejenigen Eigenschaften, welche für das Folgende in Betracht kommen, noch einmal kurz angeführt werden.

Die in der vorhergehenden Arbeit zu Grunde gelegte Fläche T sei auf eine der möglichen Weisen durch p Querschnittpaare a, b und $p-1$ Hülfslinien c in eine einfach zusammenhangende Fläche T' zerlegt; auch seien die der gewählten Zerlegung entsprechenden p Normalintegrale $u_1, u_2, \ldots, u_p$ gebildet. Dieselben sind bis auf additive Constanten bestimmt durch die Bedingungen, dass allgemein der Periodicitätsmodul von u_μ am Querschnitte a_μ den Werth πi besitzt, die Periodicitätsmodulen von u_μ an allen übrigen Querschnitten a den Werth 0 haben. Bezeichnet man den in Folge dieser Bedingungen ebenfalls bestimmten Periodicitätsmodul der Function u_μ am Querschnitte $b_{\mu'}$ mit $a_{\mu\mu'}$, so besteht für jedes μ und μ' von 1 bis p die Relation $a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$. Was endlich die noch willkürlichen additiven Constanten betrifft, so sollen dieselben durch die Bedingung bestimmt werden, dass eine jede der p Functionen u in dem Verzweigungspunkte α_{2p+2} verschwinde. Das auf diese Weise vollständig bestimmte System der p Integrale u, welches früher zur Abkürzung mit $\int\limits_{\alpha_{2p+2}}^{z,\,s}(du)$ bezeichnet wurde, geht dann jedesmal in ein System correspondirender Halber seiner Periodicitätsmodulen über, wenn man an Stelle von z, s einen der $2p+2$ Verzweigungspunkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p+1}, \alpha_{2p+2}$ treten lässt, und liefert schliesslich, wenn man die dem ν^{ten}, zum Verzweigungspunkte α_ν gehörigen, Systeme correspondirender Halber der Periodicitätsmodulen entsprechende Charakteristik mit $[A_\nu]$ bezeichnet, ein System von $2p+2$ Charakteristiken:

$$[A_1],\ [A_2],\ \ldots,\ [A_{2p+1}],\ [0],$$

welches die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) Versteht man unter $[A_\mu]$, $[A_\nu]$ irgend zwei der Charakteristiken $[A_1]$, $[A_2], \ldots, [A_{2p+1}]$, so ist stets $(-1)^{\left|{A_\mu \atop A_\nu}\right|} = -1$.

2) Zwischen den $2p+1$ Charakteristiken $[A]$ besteht nur die eine lineare Relation $[A_1]+[A_2]+\cdots+[A_{2p+1}] = [0]$, so dass also je $2p$ derselben linear-unabhängig sind.

3) Bezeichnet man mit $[\varkappa]$ die Summe der unter den $[A]$ vorkommenden ungeraden Charakteristiken, mit $\overset{n}{\Sigma}[A]$ eine Summe von n der Charakteristiken $[A]$, so lässt sich jede der 2^{2p} überhaupt existirenden Charakteristiken immer und nur auf eine Weise in die Form $[\varkappa] + \overset{n}{\Sigma}[A]$, $n \overline{\gtrless} p$, bringen, und es sind dann die den Formen:

$$[\varkappa] + \sum^{p-4\mu}[A], \quad [\varkappa] + \sum^{p-4\mu-3}[A], \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots,$$

entsprechenden Charakteristiken gerade, die den Formen:

$$[\varkappa] + \sum^{p-4\mu-1}[A], \quad [\varkappa] + \sum^{p-4\mu-2}[A], \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots,$$

entsprechenden Charakteristiken ungerade.

Substituirt man jetzt in der die Function $\vartheta[\eta]((v))$ darstellenden Reihe, bei welcher die Constanten $a_{\mu\mu'}$ nur den für die Convergenz der Reihe nothwendigen Bedingungen unterworfen sind, allgemein an Stelle von $a_{\mu\mu'}$ den Periodicitätsmodul $a_{\mu\mu'}$ der Function u_μ am Querschnitte $b_{\mu'}$ und lässt dann an Stelle der Charakteristik $[\eta]$ der Reihe nach die sämmtlichen 2^{2p} Charakteristiken treten, so erhält man ein System von 2^{2p} speciellen ϑ-Functionen, welches (wie ich in Art. 12 meiner schon pag. 59 citirten Arbeit nachgewiesen habe) die Eigenschaft besitzt, dass für $(v) = (0)$ nicht nur die in dem Systeme enthaltenen, den ungeraden Charakteristiken entsprechenden, ungeraden Functionen verschwinden, sondern auch von den noch übrigen, den geraden Charakteristiken entsprechenden, geraden Functionen alle diejenigen, deren Charakteristiken nicht in der Form $[\varkappa] + \sum^{p}[A]$ darstellbar sind; mit anderen Worten, es ist stets $\vartheta[\varkappa + \sum^{n} A]((0)) = 0$, wenn $n < p$, während $\vartheta[\varkappa + \sum^{p} A]((0))$ immer einen von 0 verschiedenen Werth besitzt.

Mit Rücksicht auf dieses System von speciellen ϑ-Functionen und auf die später zu machenden Anwendungen sollen jetzt die in (S) vorkommenden Grössen x' der Bedingung unterworfen werden, dass alle diejenigen von ihnen den Werth Null besitzen, deren Charakteristiken nicht in der Form $[\varkappa] + \sum^{p}[A]$ darstellbar sind. Erfüllen die Grössen x' diese Bedingung, ist also immer:

$$x'_{[\eta]} = 0, \text{ wenn } [\eta] = [\varkappa] + \sum^{n}[A], \qquad n < p,$$

so lässt sich mit Hülfe der Formel (F') eine jede der $(2p+1)_p$ Grössen x', deren Charakteristiken in der Form $[\varkappa] + \sum^{p}[A]$ enthalten sind, auf $2 \cdot 2^p$ Weisen durch je 2^p der Grössen x linear ausdrücken. Die Herleitung der betreffenden Gleichungen bildet das Ziel der folgenden Untersuchung.

Setzt man in der Formel (F') $m = p$, so wird $s = r = 2^p$, und es entsteht die Formel:

$$(F_1') \qquad \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (-1)^{\zeta \mid a_\varrho} x'_{\eta a_\varrho} = (-1)^{\eta \mid \zeta} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (-1)^{\eta \mid b_\varrho} x_{\zeta b_\varrho}, \qquad r = 2^p.$$

Da nach Früherem das den Ausgangspunkt bildende Gleichungensystem (S) ein involutorisches ist, so können in allen aus ihm abgeleiteten Gleichungen die Grössen x mit den Grössen x' beziehlich vertauscht werden. Führt man diese Vertauschung in der Formel (F_1') aus und lässt zugleich die Symbole $[\eta]$, $[\zeta]$, die beliebige Charakteristiken bezeichnen, ihre Plätze wechseln, so erhält man die weitere Formel:

$$(F_2') \qquad \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (-1)^{\xi\,|\,b_\varrho} x'_{[\eta\, b_\varrho]} = (-1)^{\eta\,|\,\zeta} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (-1)^{\eta\,|\,a_\varrho} x_{[\zeta\, a_\varrho]}, \qquad r = 2^p.$$

Aus den Formeln (F_1'), (F_2') lassen sich nun durch passende Bestimmung der in ihnen vorkommenden Charakteristiken die erwähnten Gleichungen erhalten.

Zu dem Ende bezeichne man zunächst die $2p+1$ Charakteristiken:

$$[A_1], \quad [A_2], \quad \ldots, \quad [A_{2p+1}],$$

in irgend welcher Reihenfolge mit:

$$[\alpha_1], \quad [\alpha_2], \quad \ldots, \quad [\alpha_{2p+1}]$$

und bilde das zu den Charakteristiken $[\alpha_1], [\alpha_2], \ldots, [\alpha_p]$ — die der gewählten Bezeichnung zufolge als p aus den Charakteristiken $[A]$ willkürlich herausgegriffene angesehen werden können — als Basis gehörige vollständige System, dessen 2^p Charakteristiken in gewohnter Weise mit $[a_1], [a_2], \ldots, [a_r]$ bezeichnet werden sollen. Identificirt man dann in den Formeln (F_1'), (F_2') die vorkommenden Charakteristiken $[a_1], [a_2], \ldots, [a_r]$ mit den soeben gebildeten, so sind nach dem Früheren für die 2^p Charakteristiken $[b_1], [b_2], \ldots, [b_r]$ die 2^p Charakteristiken desjenigen vollständigen Systems zu setzen, welches auf p linearunabhängigen den Gleichungen:

$$(-1)^{\xi\,|\,\alpha_1} = +1, \quad (-1)^{\xi\,|\,\alpha_2} = +1, \quad \ldots, \quad (-1)^{\xi\,|\,\alpha_p} = +1$$

genügenden Charakteristiken $[\xi] = [\beta_1], [\beta_2], \ldots, [\beta_p]$ als Basis aufgebaut werden kann. Berücksichtigt man nun, dass wegen $(-1)^{A_\mu\,|\,A_\nu} = -1$ auch stets $(-1)^{\alpha_\mu\,|\,\alpha_\nu} = -1$ ist, wenn μ, ν irgend zwei verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, 2p+1$ bezeichnen, und dass zwischen den Charakteristiken $[\alpha]$ nur die eine lineare Relation $[\alpha_1] + [\alpha_2] + \cdots + [\alpha_{2p+1}] = [0]$ besteht, so erkennt man, dass die Charakteristiken:

$$[\beta_1] = [\alpha_{p+1}\, \alpha_{2p+1}], \quad [\beta_2] = [\alpha_{p+2}\, \alpha_{2p+1}], \quad \ldots, \quad [\beta_p] = [\alpha_{2p}\, \alpha_{2p+1}]$$

p linearunabhängige Lösungen $[\xi]$ der soeben aufgestellten Gleichungen sind. Die 2^p Charakteristiken des auf ihnen als Basis aufgebauten vollständigen Systems sind daher die gesuchten Charakteristiken $[b_1], [b_2], \ldots, [b_r]$, und man sieht zugleich, dass dieselben auch dadurch erhalten werden können, dass man aus den Charakteristiken $[\alpha_{p+1}], [\alpha_{p+2}], \ldots, [\alpha_{2p+1}]$ alle Summen, welche eine gerade Anzahl dieser Charakteristiken enthalten, bildet und die Charakteristik $[0]$ noch hinzunimmt.

In der Formel (F_1') und unabhängig davon in der Formel (F_2') bezeichneten $[\eta]$, $[\xi]$ beliebige Charakteristiken. Setzt man jetzt, nachdem die Charakteristiken $[a]$ und $[b]$ in angegebener Weise bestimmt sind, weiter:

$$[\eta] = [\varkappa\, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p],$$

so lässt sich für $\varrho > 1$ jede Charakteristik $[\eta a_\varrho] = [\varkappa\, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p a_\varrho]$, da $[a_\varrho]$ eine Summe gewisser der Charakteristiken $[\alpha_1], [\alpha_2], \ldots, [\alpha_p]$ ist, in die Form $[\varkappa] + \overset{n}{\Sigma}[\alpha]$, $n \overline{\gtrless} p-1$, bringen, jede Charakteristik $[\eta b_\varrho] = [\varkappa\, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p b_\varrho]$, da $[b_\varrho]$ sich aus einer geraden

Anzahl der Charakteristiken $[\alpha_{p+1}]$, $[\alpha_{p+2}]$, ..., $[\alpha_{2p+1}]$ zusammensetzt, in die Form $[\varkappa] + \overset{n}{\Sigma}[\alpha]$, $n > p + 2$, aber auch wegen $[\alpha_1] + [\alpha_2] + \cdots + [\alpha_{2p+1}] = [0]$ in die Form $[\varkappa] + \overset{n}{\Sigma}[\alpha]$, $n < p - 1$, und es verschwinden daher auf den linken Seiten der Gleichungen (F_1'), (F_2') in Folge der über die x' gemachten Voraussetzung alle Grössen $x'_{[\eta a_\varrho]}$ und $x'_{[\eta b_\varrho]}$, für welche $\varrho > 1$ ist, während die dem Werthe $\varrho = 1$ entsprechenden Grössen $x'_{[\eta a_1]}$ und $x'_{[\eta b_1]}$, wegen $[a_1] = [b_1] = [0]$, beide in $x'_{[\varkappa \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p]}$ übergehen. Aus den Formeln (F_1'), (F_2') gehen auf diese Weise, wenn man schliesslich noch der einfacheren Schreibweise wegen die Charakteristik $[\varkappa\, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p]$ mit $[\eta_0]$ bezeichnet, so dass also:

$$[\eta_0] = [\varkappa\, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p]$$

ist, die Gleichungen:

$$(G_1) \qquad x'_{[\eta_0]} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (-1)^{\eta_0 \mid \zeta b_\varrho} x_{[\zeta b_\varrho]},$$

$$(G_2) \qquad x'_{[\eta_0]} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (-1)^{\eta_0 \mid \zeta a_\varrho} x_{[\zeta a_\varrho]}$$

hervor, und es kann dabei, da $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$, ..., $[\alpha_p]$ p aus den $2p + 1$ Charakteristiken $[A]$ willkürlich herausgegriffene bezeichnen, $x'_{[\eta_0]}$ als Repräsentant einer beliebigen der $(2p + 1)_p$ nicht verschwindenden Grössen x' angesehen werden.

In den beiden Formeln (G_1), (G_2) kann nun endlich für $[\zeta]$ jede beliebige Charakteristik gesetzt werden; es entstehen aber, wie früher gezeigt wurde, aus jeder Formel im Ganzen nur 2^p verschiedene Gleichungen, wenn man an Stelle von $[\zeta]$ der Reihe nach alle 2^{2p} Charakteristiken treten lässt. In Gemässheit der im vorigen Artikel angestellten Untersuchung gewinnt man die in (G_1) enthaltenen Gleichungen, indem man p Charakteristiken $[\beta_1']$, $[\beta_2']$, ..., $[\beta_p']$ bestimmt, die zusammen mit den Charakteristiken $[\beta_1]$, $[\beta_2]$, ..., $[\beta_p]$ ein System von $2p$ linearunabhängigen Charakteristiken bilden, mit $[b_1']$, $[b_2']$, ..., $[b_r']$ die 2^p Charakteristiken des auf ihnen als Basis aufgebauten vollständigen Systems, mit $[\zeta_0]$ eine willkürlich gewählte Charakteristik bezeichnet und dann in (G_1) an Stelle von $[\zeta]$ der Reihe nach die 2^p Charakteristiken $[\zeta_0 b_1']$, $[\zeta_0 b_2']$, ..., $[\zeta_0 b_r']$ treten lässt. Ein Blick auf die Charakteristiken $[\beta]$ zeigt, dass die Charakteristiken $[\alpha_1\, \alpha_{2p+1}]$, $[\alpha_2\, \alpha_{2p+1}]$, ..., $[\alpha_p\, \alpha_{2p+1}]$ der für die Charakteristiken $[\beta']$ gestellten Bedingung genügen, und es kann daher:

$$[\beta_1'] = [\alpha_1\, \alpha_{2p+1}],\ [\beta_2'] = [\alpha_2\, \alpha_{2p+1}],\ \dots,\ [\beta_p'] = [\alpha_p\, \alpha_{2p+1}]$$

gesetzt werden. Entsprechend gewinnt man die in (G_2) enthaltenen 2^p Gleichungen, indem man p Charakteristiken $[\alpha_1']$, $[\alpha_2']$, ..., $[\alpha_p']$ bestimmt, die zusammen mit den Charakteristiken $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$, ..., $[\alpha_p]$ ein System von $2p$ linearunabhängigen Charakteristiken bilden, mit $[a_1']$, $[a_2']$, ..., $[a_r']$ die 2^p Charakteristiken des auf ihnen als Basis aufgebauten vollständigen Systems, mit $[\zeta_0]$ wiederum eine willkürlich gewählte Charakteristik bezeichnet und dann in (G_2) an Stelle von $[\zeta]$ der Reihe nach die 2^p Cha-

rakteristiken $[\zeta_0 a'_1]$, $[\zeta_0 a'_2]$, ..., $[\zeta_0 a'_r]$ treten lässt. Man erkennt unmittelbar, dass die Charakteristiken $[\alpha_{p+1}]$, $[\alpha_{p+2}]$, ..., $[\alpha_{2p}]$ der für die Charakteristiken $[\alpha']$ gestellten Bedingung genügen, und es kann daher:

$$[\alpha'_1] = [\alpha_{p+1}],\ [\alpha'_2] = [\alpha_{p+2}],\ \ldots,\ [\alpha'_p] = [\alpha_{2p}]$$

gesetzt werden. Lässt man nun, nachdem man schliesslich noch die willkürliche Charakteristik $[\zeta_0]$ mit der im Vorigen definirten Charakteristik $[\eta_0] = [\varkappa \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]$ identificirt hat, in (G_1) an Stelle von $[\zeta]$ der Reihe nach die den aufgestellten Charakteristiken $[\beta']$ entsprechenden 2^p Charakteristiken $[\eta_0 b'_1]$, $[\eta_0 b'_2]$, ..., $[\eta_0 b'_r]$, in (G_2) dagegen an Stelle von $[\zeta]$ die den aufgestellten Charakteristiken $[\alpha']$ entsprechenden 2^p Charakteristiken $[\eta_0 a'_1]$, $[\eta_0 a'_2]$, ..., $[\eta_0 a'_r]$ treten, so erhält man die gewünschten beiden Gruppen von je 2^p Gleichungen in der Form:

$$(G'_1)\qquad \begin{cases} x'_{[\eta_0]} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (-1)^{\eta_0 \,|\, \eta_0 b'_\lambda b_\varrho}\, x_{[\eta_0 b'_\lambda b_\varrho]}\,, \\ \lambda = 1, 2, \ldots, r; \end{cases}$$

$$(r = 2^p)$$

$$(G'_2)\qquad \begin{cases} x'_{[\eta_0]} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (-1)^{\eta_0 \,|\, \eta_0 a'_\lambda a_\varrho}\, x_{[\eta_0 a'_\lambda a_\varrho]}\,, \\ \lambda = 1, 2, \ldots, r. \end{cases}$$

Nach dem im vorigen Artikel Bemerkten enthalten sowohl die rechten Seiten der 2^p Gleichungen der Gruppe (G'_1) wie die rechten Seiten der 2^p Gleichungen der Gruppe (G'_2) zusammengenommen die sämmtlichen 2^{2p} Grössen x, aber jede nur einmal, und da ferner sowohl durch Addition der 2^p Gleichungen der Gruppe (G'_1), wie durch Addition der 2^p Gleichungen der Gruppe (G'_2) die dem ursprünglichen Systeme (S) angehörige Gleichung:

$$2^p x'_{[\eta_0]} = \sum_{[\varepsilon]} (-1)^{\eta_0 \,|\, \varepsilon}\, x_{[\varepsilon]}$$

hervorgeht, so repräsentirt jede der beiden Gruppen in ihren 2^p Gleichungen eine merkwürdige Zerspaltung der zur Charakteristik $[\eta_0]$ gehörigen, soeben aufgestellten Gleichung des Systems (S).

7.

Während im vorhergehenden Artikel das Gleichungensystem (S) unter der Voraussetzung untersucht wurde, dass nicht nur die den ungeraden Charakteristiken entsprechenden Grössen x' sämmtlich den Werth Null besitzen, sondern auch von den noch übrigen alle bis auf $(2p+1)_p$, deren Charakteristiken einer bestimmten Bedingung genügen, soll jetzt der allgemeinere Fall behandelt werden, wo nur diejenigen $2^{p-1}(2^p - 1)$ Grössen x' verschwinden, deren zugehörige Charakteristiken ungerade sind; mit anderen Worten, die Grössen x' sollen jetzt der Bedingung:

$$x'_{[\eta]} = 0, \text{ wenn } \sum_1^p \eta_\nu \eta'_\nu \equiv 1 \pmod{2},$$

unterworfen werden. Da für $p = 1$ und für $p = 2$ dieser Fall mit dem im vorhergehenden Artikel behandelten zusammenfällt, so soll für das Folgende $p > 2$ vorausgesetzt werden.

Für die Behandlung des vorliegenden Falles empfiehlt es sich, zur Darstellung der Charakteristiken die $2p + 2$ Charakteristiken eines jener ausgezeichneten Systeme zu benutzen, deren Bildung in der vorhergehenden Arbeit gelehrt wurde. Bezeichnet man die $2p + 2$ Charakteristiken eines solchen Systems mit $[A'_1]$, $[A'_2]$, $\ldots$, $[A'_{2p+2}]$, so lassen sich die für die nachstehenden Untersuchungen in Betracht kommenden Eigenschaften desselben folgendermassen zusammenfassen:

1) Versteht man unter $[A'_\mu]$, $[A'_\nu]$, $[A'_\varrho]$, $[A'_\sigma]$ vier beliebige der $2p + 2$ Charakteristiken $[A']$, so ist stets $(-1)^{A'_\mu A'_\nu \mid A'_\mu A'_\varrho} = -1$, $(-1)^{A'_\mu A'_\nu \mid A'_\mu A'_\sigma} = -1$, und daher weiter $(-1)^{A'_\mu A'_\nu \mid A'_\varrho A'_\sigma} = +1$. Die Richtigkeit dieser Relationen zeigt sich sofort, wenn man berücksichtigt, dass aus dem Systeme $[A'_1]$, $[A'_2]$, $\ldots$, $[A'_{2p+2}]$ durch Addition einer beliebigen seiner $2p + 2$ Charakteristiken zu den $2p + 1$ übrigen ein System von $2p + 1$ Charakteristiken $[A]$ von derselben Art hervorgeht, wie es den Untersuchungen des vorigen Artikels zu Grunde gelegt wurde.

2) Die Relation $[A'_1] + [A'_2] + \cdots + [A'_{2p+2}] = [0]$ ist die einzige eine gerade Anzahl von Charakteristiken $[A']$ enthaltende lineare Relation; die Summe von irgend $2n$ der Charakteristiken $[A']$ kann daher, wenn $n < p + 1$ ist, niemals der Charakteristik $[0]$ gleich sein.

3) Bezeichnet man mit $[\varkappa]$ die Summe der in dem Systeme $[A'_1]$, $[A'_2]$, $\ldots$, $[A'_{2p+2}]$ enthaltenen ungeraden Charakteristiken, mit $\overset{n}{\Sigma}[A']$ eine Summe von n der Charakteristiken $[A']$, so ist (unter μ eine positive oder negative ganze Zahl verstanden) jede Charakteristik von der Form $[\varkappa] + \overset{p+4\mu+1}{\Sigma}[A']$ gerade, jede Charakteristik von der Form $[\varkappa] + \overset{p+4\mu+3}{\Sigma}[A']$ ungerade.

Die Aufgabe der nachstehenden Untersuchung besteht nun darin, aus dem Systeme (S) unter Berücksichtigung der für die Grössen x' oben aufgestellten Bedingung eine eigenthümliche Formel abzuleiten, die, wie im Schlussartikel gezeigt werden wird, die Grundlage für das von den Herren *Nöther* und *Frobenius* aufgestellte Additionstheorem der allgemeinen ϑ-Functionen bildet.

Um zu dieser Formel zu gelangen, bezeichne man die $2p + 2$ Charakteristiken:

$$[A'_1], \quad [A'_2], \quad \ldots, \quad [A'_{2p+2}]$$

in irgend welcher Reihenfolge mit:

$$[\alpha_0], [\alpha_1], \ldots, [\alpha_7], [\beta_1], [\beta_2], \ldots, [\beta_{p-3}], [\gamma_1], [\gamma_2], \ldots, [\gamma_{p-3}]$$

und bilde aus den Charakteristiken $[\beta]$, $[\gamma]$ die neuen Charakteristiken:

$$[\lambda_1] = [\beta_1 \gamma_1], \quad [\lambda_2] = [\beta_2 \gamma_2], \quad \ldots, \quad [\lambda_{p-3}] = [\beta_{p-3} \gamma_{p-3}].$$

Diese $p-3$ Charakteristiken $[\lambda]$ sind nach dem unter 2) Bemerkten linearunabhängig, und es kann daher auf denselben als Basis ein vollständiges System aufgebaut werden, dessen 2^{p-3} Charakteristiken in bekannter Weise mit:

$$[l_1],\ [l_2],\ \ldots,\ [l_r], \qquad r = 2^{p-3},$$

bezeichnet werden sollen. Auf Grund der unter 1) aufgestellten Relationen hat man dann hier, wenn $[\lambda_\sigma]$, $[\lambda_\tau]$ irgend zwei der $p-3$ Charakteristiken $[\lambda]$, $[\alpha_\mu]$, $[\alpha_\nu]$ zwei beliebige der acht Charakteristiken $[\alpha]$ bezeichnen, endlich $[l_\varrho]$ eine der 2^{p-3} Charakteristiken $[l]$ ist, die Beziehungen:

$$(-1)^{\lambda_\sigma \mid \lambda_\tau} = +1, \qquad (-1)^{\alpha_\mu \alpha_\nu \mid \lambda_\tau} = +1,$$

und weiter noch, als eine Folge der letzteren, die Relation:

$$(-1)^{\alpha_\mu \alpha_\nu \mid l_\varrho} = +1.$$

Bildet man endlich noch aus der schon oben eingeführten Charakteristik $[\varkappa]$ und den $p-3$ Charakteristiken $[\beta]$ die Charakteristik:

$$[k] = [\varkappa \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{p-3}]$$

und versteht unter $\overset{n}{\Sigma}[\alpha]$ eine Summe von n der Charakteristiken $[\alpha_0]$, $[\alpha_1]$, ..., $[\alpha_7]$, so sind, wie unmittelbar aus 3) folgt, die den Formen:

$$[k] + [l_\varrho], \qquad [k] + [l_\varrho] + \overset{4}{\Sigma}[\alpha]$$

entsprechenden Charakteristiken gerade, die den Formen:

$$[k] + [l_\varrho] + \overset{2}{\Sigma}[\alpha], \quad [k] + [l_\varrho] + \overset{6}{\Sigma}[\alpha]$$

entsprechenden Charakteristiken ungerade.

Nach diesen Vorbereitungen gehe man auf die mit (F') bezeichnete Formel:

$$2^{p-m} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (-1)^{\zeta \mid a_\varrho} x'_{[\eta a_\varrho]} = (-1)^{\eta \mid \zeta} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} (-1)^{\eta \mid b_\sigma} x_{[\zeta b_\sigma]}$$

des Art. 5 zurück und setze darin, nachdem man für die Zahl m den Werth $p-3$ eingeführt hat, an Stelle der $r = 2^m = 2^{p-3}$ Charakteristiken $[a_1]$, $[a_2]$, ..., $[a_r]$ die vorher aufgestellten 2^{p-3} Charakteristiken $[l_1]$, $[l_2]$, ..., $[l_r]$ des auf den Charakteristiken $[\lambda_1]$, $[\lambda_2]$, ..., $[\lambda_{p-3}]$ als Basis aufgebauten vollständigen Systems. An Stelle der $s = 2^{2p-m} = 2^{p+3}$ Charakteristiken $[b_1]$, $[b_2]$, ..., $[b_s]$ sind dann die 2^{p+3} Charakteristiken desjenigen vollständigen Systems zu setzen, welches auf $p+3$ linearunabhängigen den Gleichungen:

$$(-1)^{\xi \mid \lambda_1} = +1, \quad (-1)^{\xi \mid \lambda_2} = +1, \ldots, \quad (-1)^{\xi \mid \lambda_{p-3}} = +1$$

genügenden Charakteristiken $[\xi]$ als Basis aufgebaut werden kann. Ein Blick auf die oben angeführten Beziehungen $(-1)^{\lambda_\sigma \mid \lambda_\tau} = +1$, $(-1)^{\alpha_\mu \alpha_\nu \mid \lambda_\tau} = +1$ und auf das unter 2) Bemerkte zeigt nun, dass die Charakteristiken:

$$[\lambda'_1] = [\lambda_1], \quad [\lambda'_2] = [\lambda_2], \quad \ldots, \quad [\lambda'_{p-3}] = [\lambda_{p-3}],$$

$$[\lambda'_{p-2}] = [\alpha_1 \alpha_2], \quad [\lambda_{p-1}] = [\alpha_1 \alpha_3], \quad \ldots, \quad [\lambda'_{p+3}] = [\alpha_1 \alpha_7]$$

$p + 3$ linearunabhängige Lösungen $[\xi]$ der soeben aufgestellten Gleichungen sind, und es sind daher die 2^{p+3} Charakteristiken:

$$[l'_1], \quad [l'_2], \quad \ldots, \quad [l'_s], \qquad\qquad s = 2^{p+3},$$

des auf ihnen als Basis aufgebauten vollständigen Systems in (F') an Stelle der Charakteristiken $[b_1]$, $[b_2]$, …, $[b_s]$ zu setzen. Setzt man dann zugleich, indem man unter $[\omega]$ eine willkürliche Charakteristik versteht:

$$[\eta] = [\omega \alpha_\mu], \qquad\qquad [\xi] = [k],$$

so erhält man aus der obigen Gleichung, wenn man schliesslich noch den an Stelle von $(-1)^{\eta \mid \xi}$ rechts auftretenden Factor $(-1)^{\omega \alpha_\mu \mid k}$ auf die linke Seite schafft, die neue Gleichung:

$$\text{(I)} \qquad 8 \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (-1)^{k \mid \omega \alpha_\mu l_\varrho} \, x'_{[\omega \alpha_\mu l_\varrho]} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} (-1)^{\omega \alpha_\mu \mid l'_\sigma} \, x_{[k l'_\sigma]}.$$

In der gewonnenen Formel lasse man jetzt an Stelle von $[\alpha_\mu]$ der Reihe nach die Charakteristiken $[\alpha_0]$, $[\alpha_1]$, …, $[\alpha_7]$ treten und addire die acht so entstehenden Gleichungen; man erhält dann, wenn man noch auf der rechten Seite die Grösse $(-1)^{\omega \alpha_\mu \mid l'_\sigma}$ durch das ihr gleiche Produkt $(-1)^{\omega \alpha_0 \mid l'_\sigma} \cdot (-1)^{\alpha_0 \alpha_\mu \mid l'_\sigma}$ ersetzt und die Summation passend anordnet, zunächst:

$$8 \sum_{\mu=0}^{\mu=7} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (-1)^{k \mid \omega \alpha_\mu l_\varrho} \, x'_{[\omega \alpha_\mu l_\varrho]} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} (-1)^{\omega \alpha_0 \mid l'_\sigma} \left(\sum_{\mu=0}^{\mu=7} (-1)^{\alpha_0 \alpha_\mu \mid l'_\sigma} \right) x_{[k l'_\sigma]}.$$

Um den Werth der auf der rechten Seite vorkommenden in besondere Klammern eingeschlossenen Summe zu bestimmen, berücksichtige man, dass man jede der s Charakteristiken $[l']$, und zwar jede nur einmal, erhält, wenn man in den vier Formen:

$$[l_\varrho], \quad [l_\varrho \alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2}], \quad [l_\varrho \alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2} \alpha_{\nu_3} \alpha_{\nu_4}], \quad [l_\varrho \alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2} \alpha_{\nu_3} \alpha_{\nu_4} \alpha_{\nu_5} \alpha_{\nu_6}]$$

die Zahl ϱ der Reihe nach die Werthe 1, 2, …, r annehmen lässt und in den so entstandenen Formen dann noch an Stelle von $\nu_1 \nu_2$, $\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4$, $\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6$ alle Combinationen der Elemente 1, 2, …, 7 zur zweiten, vierten, beziehlich sechsten Classe ohne Wiederholung setzt. Dem entsprechend unterscheide man für die Bestimmung der in Rede stehenden Summe die folgenden vier Fälle:

1) Sei $[l'_\sigma] = [l_\varrho]$; dann erhält man, da nach Früherem stets $(-1)^{\alpha_0 \alpha_\mu \mid l_\varrho} = +1$ ist:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=7} (-1)^{\alpha_0 \alpha_\mu \mid l'_\sigma} = \sum_{\mu=0}^{\mu=7} (-1)^{\alpha_0 \alpha_\mu \mid l_\varrho} = 8.$$

2) Sei $[l'_\sigma] = [l_\varrho \alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2}]$; dann erhält man, da der Ausdruck $(-1)^{\alpha_0 \alpha_\mu \mid \alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2}}$ sechsmal den Werth $+1$, zweimal den Werth -1 annimmt, wenn μ die Werthe 0, 1, …, 7 durchläuft:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=7}(-1)^{\alpha_0\alpha_\mu\,|\,l'_\sigma} = \sum_{\mu=0}^{\mu=7}(-1)^{\alpha_0\alpha_\mu\,|\,l_\varrho\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}} = \sum_{\mu=0}^{\mu=7}(-1)^{\alpha_0\alpha_\mu\,|\,\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}} = 4.$$

3) Sei $[l'_\sigma] = [l_\varrho\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\alpha_{\nu_3}\alpha_{\nu_4}]$; dann erhält man, da der Ausdruck $(-1)^{\alpha_0\alpha_\mu\,|\,\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\alpha_{\nu_3}\alpha_{\nu_4}}$ viermal den Werth $+1$, viermal den Werth -1 annimmt, wenn μ die Werthe $0, 1, \ldots, 7$ durchläuft:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=7}(-1)^{\alpha_0\alpha_\mu\,|\,l'_\sigma} = \sum_{\mu=0}^{\mu=7}(-1)^{\alpha_0\alpha_\mu\,|\,l_\varrho\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\alpha_{\nu_3}\alpha_{\nu_4}} = \sum_{\mu=0}^{\mu=7}(-1)^{\alpha_0\alpha_\mu\,|\,\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\alpha_{\nu_3}\alpha_{\nu_4}} = 0.$$

4) Sei $[l'_\sigma] = [l_\varrho\,\alpha_{\nu_1}\,\alpha_{\nu_2}\,\alpha_{\nu_3}\,\alpha_{\nu_4}\,\alpha_{\nu_5}\,\alpha_{\nu_6}]$; dann erhält man, da der Ausdruck $(-1)^{\alpha_0\alpha_\mu\,|\,\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\alpha_{\nu_3}\alpha_{\nu_4}\alpha_{\nu_5}\alpha_{\nu_6}}$ zweimal den Werth $+1$, sechsmal den Werth -1 annimmt, wenn μ die Werthe $0, 1, \ldots, 7$ durchläuft:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=7}(-1)^{\alpha_0\alpha_\mu\,|\,l'_\sigma} = \sum_{\mu=0}^{\mu=7}(-1)^{\alpha_0\alpha_\mu\,|\,l_\varrho\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\alpha_{\nu_3}\alpha_{\nu_4}\alpha_{\nu_5}\alpha_{\nu_6}} = \sum_{\mu=0}^{\mu=7}(-1)^{\alpha_0\alpha_\mu\,|\,\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\alpha_{\nu_3}\alpha_{\nu_4}\alpha_{\nu_5}\alpha_{\nu_6}} = -4.$$

Zerlegt man jetzt entsprechend den vier in Bezug auf die Charakteristiken $[l']$ unterschiedenen Fällen die rechte Seite der obigen Gleichung in vier Theile und führt in jedem dieser Theile an Stelle der eingeklammerten Summe den dafür unter 1), 2), 3), 4) beziehlich gefundenen Werth ein, so erhält man die Gleichung:

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned} 8\sum_{\mu=0}^{\mu=7}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}(-1)^{k\,|\,\omega\alpha_\mu l_\varrho}\,x'_{[\omega\alpha_\mu l_\varrho]} &= 8\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}(-1)^{\omega\alpha_0\,|\,l_\varrho}\,x_{[k l_\varrho]} \\ &+ 4\sum_{\nu_1\nu_2}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}(-1)^{\omega\alpha_0\,|\,l_\varrho\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}}\,x_{[k l_\varrho\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}]} \\ &- 4\sum_{\nu_1\ldots\nu_6}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}(-1)^{\omega\alpha_0\,|\,l_\varrho\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\alpha_{\nu_3}\alpha_{\nu_4}\alpha_{\nu_5}\alpha_{\nu_6}}\,x_{[k l_\varrho\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\alpha_{\nu_3}\alpha_{\nu_4}\alpha_{\nu_5}\alpha_{\nu_6}]}, \end{aligned}$$

wobei die in der zweiten und dritten Zeile vorkommenden äusseren Summationen in der Weise auszuführen sind, dass an Stelle von $\nu_1\nu_2$, $\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5\nu_6$ alle Combinationen der Elemente $1, 2, \ldots, 7$ zur zweiten, beziehlich sechsten Classe ohne Wiederholung treten.

Ueberblickt man den bisherigen Gang der Untersuchung, so erkennt man, dass zur Herleitung der Gleichung (II) aus der Formel (F') des Art. 5 die im Eingange des vorliegenden Artikels gestellte Bedingung, dass die den ungeraden Charakteristiken entsprechenden Grössen x' den Werth Null besitzen, in keiner Weise benutzt wurde, und dass daher die Gleichung (II), ebenso wie die Formel (F'), zu ihrem Bestehen lediglich erfordert, dass die Grössen x, x' den Gleichungen des ursprünglichen Systems (S) genügen. Die Gleichungen (S) bleiben aber richtig, wenn man die Grössen x mit den Grössen x' beziehlich vertauscht; dieselbe Vertauschung kann daher, unbeschadet der Richtigkeit, auch in der Gleichung (II) ausgeführt werden. Geschieht dies, und führt man alsdann die erwähnte Bedingung ein, dass $x'_{[\eta]} = 0$, wenn $\sum\limits_1^p \eta_\nu\,\eta'_\nu \equiv 1 \pmod{2}$, so ver-

schwinden auf der rechten Seite der neuen Gleichung die sämmtlichen in der zweiten und dritten Horizontalreihe stehenden Grössen x', da ihre Charakteristiken nach dem früher Bemerkten sämmtlich ungerade sind, und es bleiben nur die 2^{p-3} in der ersten Horizontalreihe stehenden Grössen x', deren Charakteristiken sämmtlich gerade sind, übrig. Vertauscht man schliesslich noch linke und rechte Seite der Gleichung und unterdrückt den den beiden Seiten gemeinsamen Factor 8, so erhält man die gewünschte Endformel in der Gestalt:

$$\text{(III)} \qquad \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (-1)^{\omega\alpha_0 \mid l_\varrho} x'_{[k l_\varrho]} = \sum_{\mu=0}^{\mu=7} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (-1)^{k \mid \omega\alpha_\mu l_\varrho} x_{[\omega\alpha_\mu l_\varrho]}, \qquad r = 2^{p-3}.$$

Der Fall $p = 3$ verdient als Grenzfall eine besondere Beachtung. In diesem Falle besteht das System der Charakteristiken $[A']$ nur aus acht Charakteristiken, die in irgend welcher Reihenfolge mit $[\alpha_0], [\alpha_1], \ldots, [\alpha_7]$ zu bezeichnen sind. Die Charakteristiken $[\beta]$, $[\gamma]$ und folglich auch die Charakteristiken $[\lambda]$ fallen hier weg, entsprechend wird $[k] = [\varkappa]$, und das System $[l_1], [l_2], \ldots, [l_r]$ reducirt sich auf die eine Charakteristik $[l_1] = [0]$. Die Formel (III) geht daher für $p = 3$ über in die einfachere:

$$\text{(III')} \qquad x'_{[\varkappa]} = \sum_{\mu=0}^{\mu=7} (-1)^{\varkappa \mid \omega\alpha_\mu} x_{[\omega\alpha_\mu]}.$$

Durch passende Wahl des zu Grunde gelegten Systems der Charakteristiken $[A']$ kann man nun $[\varkappa]$ mit jeder der 36 in diesem Falle überhaupt existirenden geraden Charakteristiken zur Uebereinstimmung bringen, und es gehen dann aus der letzten Formel, indem man für $[\omega]$ der Reihe nach alle 64 zu $p = 3$ gehörigen Charakteristiken setzt, für die betreffende Grösse $x'_{[\varkappa]}$ 64 Darstellungen durch je acht Grössen x hervor. Bei 8 dieser 64 Darstellungen, nämlich bei denen, für welche $[\omega] = [\varkappa\alpha_0]$, $[\varkappa\alpha_1], \ldots, [\varkappa\alpha_7]$ ist, sind von den auf der rechten Seite bei den Grössen x vorkommenden Charakteristiken immer sieben ungerade, während die achte mit der linksstehenden geraden Charakteristik $[\varkappa]$ übereinstimmt. Eine ausführliche Theorie dieser Charakteristikensysteme findet man in einer Arbeit des Herrn *Weber**).

8.

Die im vorigen Artikel in das Gleichungensystem (S) eingeführte Bedingung, dass die den ungeraden Charakteristiken entsprechenden Grössen x' den Werth Null besitzen, so dass also:

$$x'_{[\eta]} = 0, \text{ wenn } \sum_1^p \eta_\nu \eta'_\nu \equiv 1 \pmod{2},$$

liefert, da stets:

$$(F) \qquad 2^p x'_{[\eta]} = \sum_{[\varepsilon]} (-1)^{\eta \mid \varepsilon} x_{[\varepsilon]}$$

*) *Weber*, Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3. Berlin 1876, Reimer.

ist, zwischen den 2^{2p} Grössen x im Ganzen $2^{p-1}(2^p - 1)$ Relationen, die sich, wenn man zur Unterscheidung der geraden Charakteristiken von den ungeraden die ersteren in irgend welcher Reihenfolge mit $[g_1], [g_2], \ldots, [g_m]$, $m = 2^{p-1}(2^p + 1)$, die letzteren mit $[u_1], [u_2], \ldots, [u_n]$, $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ bezeichnet, in der Form:

$$(T) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{[\varepsilon]} (-1)^{u_\tau \mid \varepsilon} x_{[\varepsilon]} = 0, \\ \tau = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

darstellen lassen.

Die allgemeine, einem beliebigen Werthe von τ entsprechende, Gleichung des Systems (T) erleidet keine Aenderung, wenn man in dem auf der linken Seite hinter dem Summenzeichen stehenden Ausdrucke die Charakteristik $[\varepsilon]$ um eine beliebige Charakteristik $[\omega]$ vermehrt, also $(-1)^{u_\tau \mid \omega\varepsilon}$ an Stelle von $(-1)^{u_\tau \mid \varepsilon}$ und gleichzeitig $x_{[\omega\varepsilon]}$ an Stelle von $x_{[\varepsilon]}$ treten lässt, da dadurch bei der links stehenden Summe nur die Reihenfolge der Summanden geändert wird. Nun kann man aber in der so umgeformten Gleichung den allen Gliedern gemeinsamen Factor $(-1)^{u_\tau \mid \omega}$ durch Division entfernen und erkennt so, dass man in den Gleichungen (T) und folglich auch in allen daraus ableitbaren, unbeschadet der Richtigkeit, die Charakteristiken der vorkommenden Grössen x um dieselbe beliebig gewählte Charakteristik $[\omega]$ vermehren kann.

Die durch die Gleichungen (T) fixirten Relationen zwischen den Grössen x können auf mannigfache Weise durch einfachere ersetzt werden. Zur Durchführung dieser Untersuchungen bedarf man vor allem gewisser Gleichungen, die jetzt aus dem Systeme (T) abgeleitet werden sollen. Zu dem Ende trenne man in jeder Gleichung des Systems (T) die links stehende Summe in zwei Theile, von denen der erste die den geraden Charakteristiken, der zweite die den ungeraden Charakteristiken entsprechenden Glieder umfasst, und bezeichne allgemein bei der τ^{ten} Gleichung diese beiden Theile mit $G_{[u_\tau]}$ und $U_{[u_\tau]}$; dann ist:

$$G_{[u_\tau]} = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} (-1)^{u_\tau \mid g_\mu} x_{[g_\mu]}, \qquad U_{[u_\tau]} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (-1)^{u_\tau \mid u_\nu} x_{[u_\nu]},$$

und das Gleichungensystem (T) nimmt die Gestalt an:

$$(T') \qquad \begin{cases} G_{[u_\tau]} + U_{[u_\tau]} = 0, \\ \tau = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Multiplicirt man jetzt linke und rechte Seite der σ^{ten} Gleichung dieses Systems mit $(-1)^{u_\sigma \mid u_\tau}$ und summirt nach σ von 1 bis n, so erhält man zunächst:

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} (-1)^{u_\sigma \mid u_\tau} G_{[u_\sigma]} + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} (-1)^{u_\sigma \mid u_\tau} U_{[u_\sigma]} = 0,$$

und es ist dabei der gewählten Bezeichnung entsprechend:

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n}(-1)^{u_\sigma | u_\tau} G_{[u_\sigma]} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n}(-1)^{u_\sigma | u_\tau}\sum_{\mu=1}^{\mu=m}(-1)^{u_\sigma | g_\mu} x_{[g_\mu]} = \sum_{\mu=1}^{\mu=m}\left(\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n}(-1)^{u_\sigma | u_\tau g_\mu}\right)x_{[g_\mu]},$$

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n}(-1)^{u_\sigma | u_\tau} U_{[u_\sigma]} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n}(-1)^{u_\sigma | u_\tau}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}(-1)^{u_\sigma | u_\nu} x_{[u_\nu]} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\left(\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n}(-1)^{u_\sigma | u_\tau u_\nu}\right)x_{[u_\nu]}.$$

Die Werthe der beiden in besondere Klammern eingeschlossenen Summen sollen zunächst bestimmt werden. Setzt man zur Abkürzung, indem man unter $[\varepsilon]$ eine beliebige Charakteristik versteht:

$$(-1)^{\sum\limits_1^p \varepsilon_\nu \varepsilon'_\nu} = (-1)^{|\varepsilon|},$$

so ist für jedes μ von 1 bis m und jedes ν von 1 bis n $(-1)^{|g_\mu|} = +1$, $(-1)^{|u_\nu|} = -1$, auch besteht für irgend zwei Charakteristiken $[\varepsilon]$, $[\eta]$ stets die Beziehung:

$$(-1)^{\varepsilon | \eta} = (-1)^{|\varepsilon|}\cdot(-1)^{|\eta|}\cdot(-1)^{|\varepsilon\eta|}.$$

Berücksichtigt man dann, dass in Gemässheit dieser Relationen:

$$(-1)^{u_\sigma | u_\tau g_\mu} = (-1)^{|u_\sigma|}\cdot(-1)^{|u_\tau g_\mu|}\cdot(-1)^{|u_\sigma u_\tau g_\mu|} = \quad (-1)^{u_\tau | g_\mu}\cdot(-1)^{|u_\sigma u_\tau g_\mu|}$$

$$(-1)^{u_\sigma | u_\tau u_\nu} = (-1)^{|u_\sigma|}\cdot(-1)^{|u_\tau u_\nu|}\cdot(-1)^{|u_\sigma u_\tau u_\nu|} = -(-1)^{u_\tau | u_\nu}\cdot(-1)^{|u_\sigma u_\tau u_\nu|}$$

ist, und beachtet ferner, dass nach Satz IV der dritten Arbeit sowohl der Ausdruck $(-1)^{|u_\sigma u_\tau g_\mu|}$, da $[u_\tau g_\mu]$ stets eine von $[0]$ verschiedene Charakteristik ist, wie auch für $\nu \gtrless \tau$ der Ausdruck $(-1)^{|u_\sigma u_\tau u_\nu|}$ 2^{2p-2}-mal den Werth $+1$, $2^{p-1}(2^{p-1}-1)$-mal den Werth -1 annimmt, wenn an Stelle von $[u_\sigma]$ der Reihe nach die sämmtlichen ungeraden Charakteristiken treten, dass dagegen für $\nu = \tau$ der Ausdruck $(-1)^{|u_\sigma u_\tau u_\nu|}$ in $(-1)^{|u_\sigma|}$ übergeht, also für jedes σ den Werth -1 besitzt, so erhält man:

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n}(-1)^{u_\sigma | u_\tau g_\mu} = \quad (-1)^{u_\tau | g_\mu}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n}(-1)^{|u_\sigma u_\tau g_\mu|} = \quad (-1)^{u_\tau | g_\mu}\cdot 2^{p-1},$$

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n}(-1)^{u_\sigma | u_\tau u_\nu} = -(-1)^{u_\tau | u_\nu}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n}(-1)^{|u_\sigma u_\tau u_\nu|} = \begin{cases} -(-1)^{u_\tau | u_\nu}\cdot 2^{p-1}, & \text{wenn } \nu \gtrless \tau, \\ 2^{p-1}(2^p-1), & \text{wenn } \nu = \tau. \end{cases}$$

Führt man die gefundenen Werthe an Stelle der eingeklammerten Summen in die obigen Gleichungen ein, so erhält man:

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n}(-1)^{u_\sigma | u_\tau} G_{[u_\sigma]} = \quad 2^{p-1}\sum_{\mu=1}^{\mu=m}(-1)^{u_\tau | g_\mu} x_{[g_\mu]} = 2^{p-1}\, G_{[u_\tau]},$$

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n}(-1)^{u_\sigma | u_\tau} U_{[u_\sigma]} = -2^{p-1}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}(-1)^{u_\tau | u_\nu} x_{[u_\nu]} + 2^{2p-1} x_{[u_\tau]} = -2^{p-1}\, U_{[u_\tau]} + 2^{2p-1} x_{[u_\tau]},$$

und aus der zu Anfang aufgestellten Gleichung geht in Folge dessen, wenn man noch linke und rechte Seite durch 2^{p-1} dividirt, die neue Gleichung:

$$G_{[u_\tau]} - U_{[u_\tau]} = -2^p x_{[u_\tau]}$$

hervor. Durch Verbindung dieser Gleichung mit der im Systeme (T') enthaltenen Gleichung:

$$G_{[u_\tau]} + U_{[u_\tau]} = 0$$

erhält man dann die Beziehungen:

$$G_{[u_\tau]} = -2^{p-1} x_{[u_\tau]}, \qquad U_{[u_\tau]} = 2^{p-1} x_{[u_\tau]},$$

und gelangt schliesslich, wenn man noch an Stelle von $G_{[u_\tau]}$ und $U_{[u_\tau]}$ die früher damit bezeichneten Ausdrücke treten lässt, zu den Gleichungen:

$$(T_1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2^{p-1} x_{[u_\tau]} = -\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=m} (-1)^{u_\tau | g_\mu} x_{[g_\mu]}, \\ \tau = 1, 2, \ldots, n, \end{array} \right.$$

$$(T_2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2^{p-1} x_{[u_\tau]} = \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} (-1)^{u_\tau | u_\nu} x_{[u_\nu]}, \\ \tau = 1, 2, \ldots, n, \end{array} \right.$$

welche die Grundlage für die weitere Untersuchung bilden.

Zunächst zeigen die Gleichungen (T_1), dass eine jede der $2^{p-1}(2^p - 1)$ Grössen $x_{[u_1]}, x_{[u_2]}, \ldots, x_{[u_n]}$ sich linear durch die $2^{p-1}(2^p + 1)$ Grössen $x_{[g_1]}, x_{[g_2]}, \ldots, x_{[g_m]}$ ausdrücken lässt. Führt man die betreffenden Ausdrücke an Stelle der Grössen $x_{[u_1]}, x_{[u_2]}, \ldots, x_{[u_n]}$ in die von den Gleichungen (T) nur durch die Form unterschiedenen Gleichungen (T') ein, so werden diese identisch erfüllt, und es kann daher das Gleichungensystem (T_1) das ursprüngliche System (T) in jeder Beziehung ersetzen. Daraus folgt aber, dass durch die Gleichungen (T) keinerlei Beziehungen zwischen den Grössen $x_{[g_1]}, x_{[g_2]}, \ldots, x_{[g_m]}$ geschaffen werden, dass vielmehr diese Grössen in den Gleichungen (T) die Rolle von unabhängigen Veränderlichen übernehmen können. Anders verhält es sich mit den Grössen $x_{[u_1]}, x_{[u_2]}, \ldots, x_{[u_n]}$. Zwischen ihnen bestehen nämlich, als eine Folge der Gleichungen (T), die unter (T_2) fixirten Relationen. Diese Relationen gehen selbstverständlich ebenfalls in Identitäten über, wenn man darin an Stelle der Grössen $x_{[u_1]}, x_{[u_2]}, \ldots, x_{[u_n]}$ die ihnen entsprechenden linearen Functionen von $x_{[g_1]}, x_{[g_2]}, \ldots, x_{[g_m]}$ einführt, und es geben daher diese Relationen nur der Thatsache Ausdruck, dass zwischen den n, die rechten Seiten der Gleichungen (T_1) bildenden linearen Formen oder, was dasselbe, zwischen den Formen $G_{[u_1]}, G_{[u_2]}, \ldots, G_{[u_n]}$ lineare Beziehungen bestehen. Die n Gleichungen des Systems (T_2) sind aber nicht unabhängig von einander; vielmehr lassen sich dieselben, wie eine genauere Untersuchung ergibt, durch passende Verbindung auf ein System von $\frac{1}{3}(2^{p-1} - 1)(2^p - 1)$ von einander unabhängigen linearen Gleichungen, von denen jede nur $6 \cdot 2^{p-2}$ der Grössen

$x_{[u_1]}, x_{[u_2]}, \ldots, x_{[u_n]}$ mit den Coefficienten ± 1 enthält, reduciren, und zwar ist diese Reduction der ursprünglichen Gleichungen auf ein System der beschriebenen Art auf verschiedene Weisen möglich.

Die Gleichungen (T_2) sind nach dem soeben Bemerkten nicht im Stande, die ursprünglichen Gleichungen (T) zu ersetzen. Bildet man aber aus dem Systeme (T_2), indem man darin auf Grund des früher Bemerkten die vorkommenden Grössen $x_{[u_1]}, x_{[u_2]}, \ldots, x_{[u_n]}$ durch die Grössen $x_{[\omega u_1]}, x_{[\omega u_2]}, \ldots, x_{[\omega u_n]}$ ersetzt, das allgemeinere System:

$$(T_2^*) \qquad \left| \begin{array}{l} 2^{p-1}\, x_{[\omega u_\tau]} = \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} (-1)^{u_\tau | u_\nu}\, x_{[\omega u_\nu]}, \\ \qquad \tau = 1, 2, \ldots, n, \end{array} \right.$$

und betrachtet bei jeder Gleichung dieses Systems $[\omega]$ als eine variable Charakteristik, die in jede der 2^{2p} überhaupt existirenden Charakteristiken übergehen kann, so liefert dieses System durch passende Verbindung der in ihm enthaltenen Gleichungen ebenfalls alle in Folge der ursprünglichen Gleichungen (T) zwischen den Grössen x bestehenden Relationen. Man kann nämlich aus diesem Systeme, das bei variabler Charakteristik $[\omega]$ eigentlich $n \cdot 2^{2p}$ Gleichungen enthält, auf mannigfache Weise n von einander unabhängige Gleichungen herausgreifen, und solche n Gleichungen bilden dann, wie unmittelbar klar, einen vollständigen Ersatz für die ursprünglichen Gleichungen (T). Ein derartiges System von n Gleichungen erhält man beispielsweise, wenn man in der τ^{ten} Gleichung des Systems (T_2^*) $[\omega] = [u_\tau]$ setzt und dann τ die Werthe $1, 2, \ldots, n$ annehmen lässt. Mit Rücksicht auf das vorher Bemerkte folgt aber daraus weiter, dass das ursprüngliche System (T) auf mannigfache Weise ersetzt werden kann durch ein System von n Gleichungen, von denen jede nur $6 \cdot 2^{p-2}$ Grössen x von der Beschaffenheit enthält, dass ihre zugehörigen Charakteristiken durch Addition einer und derselben passend gewählten Charakteristik $[\omega]$ sämmtlich in ungerade Charakteristiken übergehen. Ein solches Gleichungensystem könnte nun ohne grosse Mühe wirklich hergestellt werden, es wäre aber dadurch nicht viel gewonnen, da die Gleichungen desselben immer einen speciellen Charakter tragen würden, und man in Folge dessen keinen Einblick in ihren Bau und ihre gegenseitigen Beziehungen erhielte. Die Aufgabe, die sich hier darbietet, besteht vielmehr darin, den allgemeinen Typus für die erwähnten Gleichungen aufzufinden, und dem entsprechend eine Formel aufzustellen, welche die sämmtlichen derartigen Gleichungen als specielle Fälle umfasst. Diese Formel, die als die Fundamentalformel der ganzen Theorie anzusehen ist, soll jetzt, unter Ausschluss des Falles $p = 1$, aus den Gleichungen (T_2^*) abgeleitet werden.

Um zu dieser Formel zu gelangen, nehme man ein System von $2p+2$ Charakteristiken:

$$[A'_1], \quad [A'_2], \quad \ldots, \quad [A'_{2p+2}]$$

von der Art, wie es im vorigen Artikel benutzt wurde, bezeichne die Charakteristiken desselben in der vorliegenden Reihenfolge mit:

$$[\alpha_0], [\alpha_1], \ldots, [\alpha_5], [\beta_1], [\beta_2], \ldots, [\beta_{p-2}], [\gamma_1], [\gamma_2], \ldots, [\gamma_{p-2}],$$

ferner mit $[\varkappa]$, wie vorher, die Summe der unter ihnen vorkommenden ungeraden Charakteristiken und bilde aus den Charakteristiken $[\beta]$, $[\gamma]$ die neuen Charakteristiken:

$$[\lambda_1] = [\beta_1\gamma_1], \quad [\lambda_2] = [\beta_2\gamma_2], \quad \ldots, \quad [\lambda_{p-2}] = [\beta_{p-2}\gamma_{p-2}].$$

Diese $p-2$ Charakteristiken $[\lambda]$ sind nach dem im vorigen Artikel unter 2) Bemerkten linearunabhängig, und es kann daher auf denselben als Basis ein vollständiges System aufgebaut werden, dessen 2^{p-2} Charakteristiken mit:

$$[l_1], [l_2], \ldots, [l_r], \qquad r = 2^{p-2},$$

bezeichnet werden sollen. Bezeichnen dann $[\lambda_\sigma]$, $[\lambda_\tau]$ irgend zwei dieser $p-2$ Charakteristiken $[\lambda]$, $[\alpha_\mu]$, $[\alpha_\nu]$ zwei beliebige der sechs Charakteristiken $[\alpha]$, und ist endlich $[l_\varrho]$ eine der 2^{p-2} Charakteristiken $[l]$, so hat man die Beziehungen:

$$(-1)^{\lambda_\sigma \mid \lambda_\tau} = +1, \qquad (-1)^{\alpha_\mu\alpha_\nu \mid \lambda_\tau} = +1,$$

und weiter noch als eine Folge der zuletzt aufgestellten, die Relation:

$$(-1)^{\alpha_\mu\alpha_\nu \mid l_\varrho} = +1.$$

Bildet man schliesslich noch aus der schon oben eingeführten Charakteristik $[\varkappa]$ und den $p-2$ Charakteristiken $[\beta]$ die Charakteristik:

$$[k] = [\varkappa\beta_1\beta_2\cdots\beta_{p-2}]$$

und versteht unter $[\alpha_\mu]$ eine beliebige der sechs Charakteristiken $[\alpha_0], [\alpha_1], \ldots, [\alpha_5]$, unter $\overset{n}{\Sigma}[\alpha]$ eine Summe von n derselben, so sind nach dem im vorigen Artikel unter 3) Bemerkten die den Formen:

$$[k] + [l_\varrho] + [\alpha_\mu], \quad [k] + [l_\varrho] + \overset{5}{\Sigma}[\alpha]$$

entsprechenden Charakteristiken ungerade, die der Form:

$$[k] + [l_\varrho] + \overset{3}{\Sigma}[\alpha]$$

entsprechenden Charakteristiken gerade.

Für das Folgende bedarf man noch der sämmtlichen Lösungen $[\xi]$ der Gleichungen:

$$(-1)^{\xi \mid \lambda_1} = +1, \quad (-1)^{\xi \mid \lambda_2} = +1, \ldots, \quad (-1)^{\xi \mid \lambda_{p-2}} = +1.$$

Ein Blick auf die oben angeführten Beziehungen $(-1)^{\lambda_\sigma \mid \lambda_\tau} = +1$, $(-1)^{\alpha_\mu\alpha_\nu \mid \lambda_\tau} = +1$ und auf das im vorigen Artikel unter 2) Bemerkte zeigt nun, dass die Charakteristiken:

$$[\lambda'_1] = [\lambda_1], \quad [\lambda'_2] = [\lambda_2], \quad \ldots, \quad [\lambda'_{p-2}] = [\lambda_{p-2}],$$

$$[\lambda'_{p-1}] = [\alpha_1\alpha_2], \quad [\lambda'_p] = [\alpha_1\alpha_3], \quad [\lambda'_{p+1}] = [\alpha_1\alpha_4], \quad [\lambda'_{p+2}] = [\alpha_1\alpha_5]$$

$p+2$ linearunabhängige Lösungen $[\xi]$ der soeben aufgestellten Gleichungen sind, und es bilden daher die 2^{p+2} Charakteristiken:

$$[l'_1], \quad [l'_2], \quad \ldots, \quad [l'_s], \qquad s = 2^{p+2},$$

des auf ihnen als Basis aufgebauten vollständigen Systems die sämmtlichen Lösungen $[\xi]$ der aufgestellten Gleichungen.

Nach diesen Vorbereitungen gehe man auf die allgemeine Gleichung des Systems (T_2^*) zurück und identificire die darin vorkommende willkürliche ungerade Charakteristik $[u_r]$ mit der ungeraden Charakteristik $[k\alpha_0 l_\sigma]$; es entsteht dann die Gleichung:

$$2^{p-1} x_{[\omega k\alpha_0 l_\sigma]} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (-1)^{k\alpha_0 l_\sigma \mid u_\nu} x_{[\omega u_\nu]}.$$

Multiplicirt man linke und rechte Seite dieser Gleichung mit $(-1)^{k\alpha_0 \mid l_\sigma}$ und summirt nach σ von 1 bis r, so erhält man, nach passender Anordnung der Summation auf der rechten Seite, zunächst:

$$2^{p-1} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} (-1)^{k\alpha_0 \mid l_\sigma} x_{[\omega k\alpha_0 l_\sigma]} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (-1)^{k\alpha_0 \mid u_\nu} \left(\sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} (-1)^{k\alpha_0 u_\nu \mid l_\sigma} \right) x_{[\omega u_\nu]}.$$

Um den Werth der in besondere Klammern eingeschlossenen Summe zu bestimmen, beachte man, dass:

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} (-1)^{k\alpha_0 u_\nu \mid l_\sigma} = \left[1 + (-1)^{k\alpha_0 u_\nu \mid \lambda_1}\right] \left[1 + (-1)^{k\alpha_0 u_\nu \mid \lambda_2}\right] \cdots \left[1 + (-1)^{k\alpha_0 u_\nu \mid \lambda_{p-2}}\right]$$

ist, und dass daher diese Summe nur dann einen von Null verschiedenen Werth, und zwar den Werth 2^{p-2} besitzt, wenn die Charakteristik $[k\alpha_0 u_\nu]$, an Stelle von $[\xi]$ gesetzt, den Gleichungen:

$$(-1)^{\xi \mid \lambda_1} = +1, \quad (-1)^{\xi \mid \lambda_2} = +1, \quad \ldots, \quad (-1)^{\xi \mid \lambda_{p-2}} = +1$$

genügt, oder, was dasselbe, wenn $[k\alpha_0 u_\nu]$ mit einer der s Charakteristiken $[l']$ übereinstimmt. Berücksichtigt man nun, dass jede der Charakteristiken $[l']$, und zwar jede nur einmal, erhalten wird, wenn man in den drei Formen:

$$[l_\varrho], \quad [l_\varrho \alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2}], \quad [l_\varrho \alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2} \alpha_{\nu_3} \alpha_{\nu_4}]$$

die Zahl ϱ der Reihe nach die Werthe $1, 2, \ldots, r$ annehmen lässt und in den so entstandenen Formen dann noch an Stelle von $\nu_1 \nu_2$, $\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4$ alle Combinationen der Elemente $1, 2, \ldots, 5$ zur zweiten, beziehlich vierten Classe ohne Wiederholung setzt, beachtet auch, dass die Charakteristik $[k\alpha_0 u_\nu]$ nie mit einer Charakteristik von der Form $[l_\varrho \alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2}]$ übereinstimmen kann, da in diesem Falle $[u_\nu]$ von der Form $[k l_\varrho \alpha_0 \alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2}]$, also gerade wäre, so erkennt man, dass die in Rede stehende Summe nur dann einen von Null verschiedenen Werth, und zwar den Werth 2^{p-2} besitzt, wenn $[k\alpha_0 u_\nu]$ in einer der beiden Formen $[l_\varrho]$ und $[l_\varrho \alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2} \alpha_{\nu_3} \alpha_{\nu_4}]$ enthalten ist, oder, was dasselbe, wenn $[u_\nu]$ mit einer der $6 \cdot 2^{p-2}$ in den Formen $[k l_\varrho \alpha_0]$ und $[k l_\varrho \alpha_0 \alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2} \alpha_{\nu_3} \alpha_{\nu_4}]$ enthaltenen Charakteristiken, die sämmtlich ungerade sind, übereinstimmt. Nun kann aber die Charakteristik $[k l_\varrho \alpha_0 \alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2} \alpha_{\nu_3} \alpha_{\nu_4}]$, da $[\alpha_0] + [\alpha_1] + \cdots + [\alpha_5] + [\lambda_1] + [\lambda_2] + \cdots + [\lambda_{p-2}] = [0]$ ist, immer in die Form $[k l_\varrho \alpha_{\nu_5}]$ gebracht werden, wenn man unter ν_5 die von den

Zahlen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ verschiedene Zahl aus der Reihe 1, 2, ..., 5, unter $[l_{\varrho'}]$ die ebenfalls zu dem Systeme der Charakteristiken $[l]$ gehörige Charakteristik $[\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{p-2} l_\varrho]$ versteht, und es wird, wenn ϱ die Werthe 1, 2, ..., r annimmt, ϱ', abgesehen von der Reihenfolge, dieselben Werthe annehmen. Daraus folgt aber, dass die $6 \cdot 2^{p-2}$ ungeraden Charakteristiken $[u]$, für welche die in Rede stehende Summe nicht verschwindet, auch erhalten werden, wenn man in den sechs Formen:

$$[k\alpha_0 l_\varrho],\ [k\alpha_1 l_\varrho],\ \ldots,\ [k\alpha_5 l_\varrho]$$

die Zahl ϱ die Werthe 1, 2, ..., r annehmen lässt.

Denkt man sich jetzt auf der rechten Seite der obigen Gleichung von den n, den Werthen $\nu = 1, 2, \ldots, n$ entsprechenden, Gliedern alle unterdrückt, bei welchen die eingeklammerte Summe den Werth Null besitzt, und setzt bei jedem der $6 \cdot 2^{p-2}$ übrig bleibenden an Stelle der in ihm vorkommenden Charakteristik $[u]$ die ihr gleiche in der Form $[k\alpha_\mu l_\varrho]$ enthaltene, an Stelle der eingeklammerten Summe den ihr bei jedem dieser Glieder zukommenden Werth 2^{p-2}, so erhält man schliesslich, wenn man noch linke und rechte Seite der neu entstandenen Gleichung durch 2^{p-2} dividirt und auf der linken Seite, nach Einschiebung des Factors $(-1)^{\left|{k\alpha_0 \atop k\alpha_0}\right|} = +1$, den Buchstaben σ durch den Buchstaben ϱ ersetzt, die gewünschte Formel in der Gestalt:

$$(U) \qquad 2\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (-1)^{\left|{k\alpha_0 \atop k\alpha_0 l_\varrho}\right|} x_{[\omega k\alpha_0 l_\varrho]} = \sum_{\mu=0}^{\mu=5} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (-1)^{\left|{k\alpha_0 \atop k\alpha_\mu l_\varrho}\right|} x_{[\omega k\alpha_\mu l_\varrho]}, \qquad r = 2^{p-2}.$$

Aus dieser Formel gehen bei festgehaltener Charakteristik $[\omega]$ die verschiedenen je $6 \cdot 2^{p-2}$ der Grössen $x_{[\omega u_1]}, x_{[\omega u_2]}, \ldots, x_{[\omega u_n]}$ enthaltenden Gleichungen hervor, indem man an Stelle des der Formel zu Grunde liegenden Systems $[A'_1], [A'_2], \ldots, [A'_{2p+2}]$ die verschiedenen derartigen Systeme einführt. Aus den so entstandenen Gleichungen kann man dann auf mannigfache Weise $\frac{1}{3}(2^{p-1}-1)(2^p-1)$ von einander unabhängige herausgreifen, die durch Combination die n demselben $[\omega]$ entsprechenden Gleichungen des Systems (T_2^*) liefern, und die demnach für $[\omega] = [0]$ die Gleichungen (T_2) zu ersetzen im Stande sind.

In dem Grenzfalle $p = 2$ besteht das System der Charakteristiken $[A']$ nur aus sechs Charakteristiken, die in irgend welcher Reihenfolge mit $[\alpha_0], [\alpha_1], \ldots, [\alpha_5]$ zu bezeichnen sind. Die Charakteristiken $[\beta]$, $[\gamma]$ und folglich auch die Charakteristiken $[\lambda]$ fallen hier weg, entsprechend wird $[k] = [\varkappa]$, und das System $[l_1], [l_2], \ldots, [l_r]$ reducirt sich auf die eine Charakteristik $[l_1] = [0]$. Die Formel (U) geht daher für $p = 2$ über in die einfachere:

$$(U') \qquad 2x_{[\omega\varkappa\alpha_0]} = \sum_{\mu=0}^{\mu=5} (-1)^{\left|{\varkappa\alpha_0 \atop \varkappa\alpha_\mu}\right|} x_{[\omega\varkappa\alpha_\mu]}.$$

Welches der sechzehn dem Falle $p = 2$ entsprechenden Systeme von je sechs Charakteristiken $[A']$ auch gewählt sein mag, die Charakteristiken $[\varkappa\alpha_0], [\varkappa\alpha_1], \ldots, [\varkappa\alpha_5]$ werden stets mit den sechs für $p = 2$ existirenden ungeraden Charakteristiken übereinstimmen, und es geht daher, wenn man diese letzteren mit $[u_1], [u_2], \ldots, [u_6]$ bezeichnet und unter ξ eine Zahl aus der Reihe 1, 2, ..., 6 versteht, die obige Formel in die Formel:

$$2x_{[\omega u_\xi]} = \sum_{\nu=1}^{\nu=6} (-1)^{u_\xi | u_\nu} x_{[\omega u_\nu]}$$

über, welche mit der von Herrn *Krazer* in seiner schon erwähnten Arbeit aufgestellten, aber auf andere Weise gewonnenen Formel (R) identisch ist. Aus ihr erhält man die sämmtlichen im Falle $p = 2$ existirenden je sechs Grössen x enthaltenden Relationen, indem man für $[\omega]$ alle sechzehn Charakteristiken setzt. Die sechzehn in der Form:

$$[\omega u_1], \quad [\omega u_2], \quad \ldots, \quad [\omega u_6]$$

enthaltenen speciellen Systeme von je sechs Charakteristiken wurden von Herrn *Krazer* *Rosenhain*'sche Sechsersysteme genannt, und es bildet das in der Formel (U) vorkommende System der $6 \cdot 2^{p-2}$ Charakteristiken von der Form:

$$[\omega k a_\mu l_\varrho], \quad \mu = 0, 1, \ldots, 5. \quad \varrho = 1, 2, \ldots, 2^{p-2},$$

die einem beliebigen p entsprechende wahre Verallgemeinerung des aufgestellten Systems $[\omega u_1]$, $[\omega u_2]$, ... $[\omega u_6]$.

9.

Die Grundlage für die Untersuchungen der vier letzten Artikel bildete das in Art. 5 aufgestellte Gleichungensystem (S), welches aus der Gleichung:

$$(F) \qquad 2^p x'_{[\eta]} = \sum_{[\varepsilon]} (-1)^{\varepsilon | \eta} x_{[\varepsilon]}$$

hervorgeht, wenn man darin an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach die sämmtlichen 2^{2p} Charakteristiken setzt. In Art. 5 hatten die Grössen x, x' den Gleichungen (S) zu genügen, waren im Uebrigen aber keiner weiteren Bedingung unterworfen; in Art. 6 kam dann die Bedingung hinzu, dass alle diejenigen Grössen x' den Werth Null besitzen, deren Charakteristiken bei fixirtem Charakteristikensysteme $[A_1]$, $[A_2]$, ..., $[A_{2p+1}]$ nicht in der Form $[\varkappa] + \overset{p}{\Sigma} [A]$ darstellbar sind; in Art. 7 und Art. 8 dagegen trat statt dieser Bedingung die andere ein, dass alle diejenigen Grössen x', deren Charakteristiken ungerade sind, den Werth Null besitzen. Die in den erwähnten Artikeln gewonnenen Resultate sollen jetzt für die Theorie der ϑ-Functionen verwerthet werden.

Den Ausgangspunkt für diese Untersuchung hat naturgemäss die in der ersten Arbeit gewonnene allgemeine ϑ-Formel $(12')$ zu bilden, die nach Einführung des Symbols $(-1)^{\varepsilon | \eta}$ die Gestalt:

$$(R) \qquad \begin{aligned} & 2^p \vartheta[\eta]((2u')) \vartheta[\eta+\varrho]((2v')) \vartheta[\eta+\sigma]((2w')) \vartheta[\eta-\varrho-\sigma]((2t')) \\ = & \sum_{[\varepsilon]} (-1)^{\varepsilon | \eta} \vartheta[\varepsilon]((2u)) \vartheta[\varepsilon+\varrho]((2v)) \vartheta[\varepsilon+\sigma]((2w)) \vartheta[\varepsilon-\varrho-\sigma]((2t)) \end{aligned}$$

annimmt. Dabei ist es nicht unwichtig zu bemerken, dass diese Formel richtig und im Wesentlichen ungeändert bleibt, wenn man irgend welche Elemente der darin vorkommenden Charakteristiken $[\varepsilon]$, $[\eta]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$ um beliebige gerade Zahlen ändert, voraus-

gesetzt nur, dass diese Aenderung gleichzeitig an allen Stellen, wo die betreffende Charakteristik vorkommt, erfolgt. Will man dagegen bei einer einzelnen ϑ-Function die Elemente der ϑ-Charakteristik um gerade Zahlen ändern, so hat man die in der ersten Arbeit aufgestellten Formeln (B_1), (B_2) zu berücksichtigen; aus ihnen ergibt sich auch leicht die Richtigkeit des vorher Bemerkten.

Ein Blick auf die Formel (R) lässt nun unmittelbar erkennen, dass die Gleichung (F) und also auch das aus ihr hervorgehende Gleichungensystem (S) erfüllt wird, wenn man allgemein:

$$(\Theta) \qquad \begin{aligned} x'_{[\eta]} &= \vartheta[\eta]((2u'))\,\vartheta[\eta+\varrho]((2v'))\,\vartheta[\eta+\sigma]((2w'))\,\vartheta[\eta-\varrho-\sigma]((2t')), \\ x_{[\varepsilon]} &= \vartheta[\varepsilon]((2u))\,\vartheta[\varepsilon+\varrho]((2v))\,\vartheta[\varepsilon+\sigma]((2w))\,\vartheta[\varepsilon-\varrho-\sigma]((2t)) \end{aligned}$$

setzt, und man kann daher auch in den Gleichungen (F'), (S') des Art. 5, da dieselben eine directe Folge der Gleichungen (S) sind, die Grössen x, x' durch die angegebenen ϑ-Producte ersetzen. Auf diese Weise erhält man eine Fülle eigenthümlicher ϑ-Relationen, von denen bisher nur einige, den Fällen $p=1, p=2$ entsprechende, bekannt waren.

Die in den Art. 6, 7, 8 gewonnenen Formeln erfordern zu ihrem Bestehen nicht nur, dass die darin vorkommenden Grössen x, x' durch die Gleichungen (S) verknüpft sind, sondern auch, wie aus dem Obigen hervorgeht, sämmtlich noch weiter, dass alle diejenigen Grössen x', deren Charakteristiken ungerade sind, den Werth Null besitzen. Erfüllen irgend welche Grössen x, x' diese beiden Bedingungen, so gelten für sie unter allen Umständen die in Art. 7 und die in Art. 8 gewonnenen Endformeln; erfüllen dieselben ausser den beiden genannten Bedingungen auch noch die weitere, dass von den den geraden Charakteristiken entsprechenden Grössen x' alle diejenigen verschwinden, deren Charakteristiken nicht in der Form $[\varkappa]+\sum^{p}[A]$ darstellbar sind, so gelten für sie stets die in Art. 6 gewonnenen Endformeln. Sollen daher die angegebenen ϑ-Producte an Stelle der Grössen x, x' in die Endformeln der erwähnten Artikel eingesetzt werden dürfen, so sind die in diesen ϑ-Producten auftretenden, bis jetzt noch willkürlichen Variablensysteme (u), (v), (w), (t) vor allem solchen Bedingungen zu unterwerfen, dass das oben mit $x'_{[\eta]}$ bezeichnete ϑ-Product immer verschwindet, wenn an Stelle von $[\eta]$ eine ungerade Charakteristik tritt. Berücksichtigt man, dass $\vartheta[\eta]((0))$ für jede ungerade Charakteristik $[\eta]$ den Werth Null besitzt, so ergibt sich, dass der gestellten Forderung auf möglichst einfache Weise genügt wird, wenn man $(2u')=(0)$ setzt. Nun sind aber die Systeme $(2u')$, $(2v')$, $(2w')$, $(2t')$ mit den Systemen (u), (v), (w), (t) verknüpft durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2u'_\nu &= u_\nu + v_\nu + w_\nu + t_\nu, \\ 2v'_\nu &= u_\nu + v_\nu - w_\nu - t_\nu, \\ 2w'_\nu &= u_\nu - v_\nu + w_\nu - t_\nu, \\ 2t'_\nu &= u_\nu - v_\nu - w_\nu + t_\nu, \end{aligned} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, p,$$

und die Bedingung $(2u')=(0)$ ist daher identisch mit der Bedingung $(u+v+w+t)=(0)$. Diese letzte Gleichung wird aber erfüllt, wenn man bei willkürlich gelassenen (u), (v), (w) die Variablen (t) durch die Gleichung $(t)=(-u-v-w)$ bestimmt. Führt man die

so bestimmten Grössen (t) in die soeben angeführten Gleichungen ein, so gehen die Systeme:

$$(2u'), \qquad (2v'), \qquad (2w'), \qquad (2t')$$

über in:

$$(0), \quad (2u+2v), \quad (2u+2w), \quad (-2v-2w),$$

und die oben mit $x'_{[\eta]}$, $x_{[\varepsilon]}$ bezeichneten ϑ-Producte nehmen, wenn man noch für $(2u)$, $(2v)$, $(2w)$ in neuer Bezeichnung (u), (v), (w) schreibt, schliesslich die Gestalt:

$$(\Theta_0) \quad \begin{aligned} x'_{[\eta]} &= \vartheta[\eta]((0))\,\vartheta[\eta+\varrho]((u+v))\,\vartheta[\eta+\sigma]((u+w))\,\vartheta[\eta-\varrho-\sigma]((-v-w)), \\ x_{[\varepsilon]} &= \vartheta[\varepsilon]((u))\,\vartheta[\varepsilon+\varrho]((v))\,\vartheta[\varepsilon+\varrho]((w))\,\vartheta[\varepsilon-\varrho-\sigma]((-u-v-w)) \end{aligned}$$

an. Die so definirten Grössen x, x' genügen dann nicht nur den Gleichungen (S), sondern es verschwindet auch immer $x'_{[\eta]}$, wenn an Stelle von $[\eta]$ eine ungerade Charakteristik tritt, und es können daher die durch sie vertretenen ϑ-Producte an Stelle der Grössen x, x' in die Formel (III) des Art. 7 und in die Formel (U) des Art. 8 eingesetzt werden. Die nähere Betrachtung der so entstehenden ϑ-Formeln wird weiter unten erfolgen.

Die Formeln des Art. 6 sind, wie daselbst schon bemerkt wurde, dazu bestimmt, in der Theorie der zu einem Systeme hyperelliptischer Integrale gehörigen ϑ-Functionen, welche aus den allgemeinen durch Specialisirung der Modulen $a_{\mu\mu'}$ entstehen, verwendet zu werden. Wie ebenfalls schon in Art. 6 angegeben wurde, erhält man die 2^{2p} zu einem Systeme hyperelliptischer, in bekannter Weise auf eine Fläche T' bezogener Normalintegrale $u_1, u_2, \ldots, u_p$ gehörigen speciellen ϑ-Functionen, indem man in der die Function $\vartheta[\eta]((v))$ darstellenden Reihe allgemein für $a_{\mu\mu'}$ den Periodicitätsmodul $a_{\mu\mu'}$ der Function u_μ am Querschnitte $b_{\mu'}$ substituirt und dann an Stelle der Charakteristik $[\eta]$ die sämmtlichen 2^{2p} Charakteristiken treten lässt. Das auf diese Weise entstehende System von 2^{2p} ϑ-Functionen besitzt dann die Eigenschaft, dass für $(v) = (0)$ nicht nur die in dem Systeme enthaltenen, den ungeraden Charakteristiken entsprechenden, ungeraden Functionen verschwinden, sondern auch von den noch übrigen, den geraden Charakteristiken entsprechenden, geraden Functionen alle diejenigen, deren Charakteristiken nicht in der Form $[\varkappa] + \sum^{p} [A]$ darstellbar sind. Bildet man daher aus solchen in ihren Modulen specialisirten ϑ-Functionen, nach Einführung der nöthigen Argumente, die unter (Θ_0) aufgestellten ϑ-Producte und bezeichnet dieselben wiederum mit $x'_{[\eta]}$, $x_{[\varepsilon]}$ beziehlich, so erfüllen die so definirten Grössen x', x auch noch die dritte oben angeführte Bedingung, und es können folglich die durch sie vertretenen ϑ-Producte an Stelle der Grössen x, x' in die Formeln (G_1), (G_2), (G'_1), (G'_2) des Art. 6 eingeführt werden. Die Formeln (G_1), (G_2) liefern dann die beiden dem vorliegenden Systeme specieller ϑ-Functionen entsprechenden Additionstheoreme in allgemeinster Gestalt; das zweite derselben stimmt im Wesentlichen mit dem zuerst von Herrn *Weierstrass* für ein solches System specieller ϑ-Functionen aufgestellten und von Herrn *Königsberger**) mitgetheilten Additionstheoreme überein. Die sämmtlichen in den beiden

*) *Königsberger*, Ueber die Transformation der Abel'schen Functionen erster Ordnung. Crelle's Journal, Bd. 64, pag. 27.

allgemeinen Additionstheoremen enthaltenen speciellen Additionstheoreme gewinnt man, wenn man in die Formeln (G_1'), (G_2') die genannten ϑ-Producte einführt. In Folge der besonderen Form, welche die Charakteristiken der in (G_1'), (G_2') vorkommenden Grössen x besitzen, sind die aus (G_1'), (G_2') durch Substitution der erwähnten ϑ-Producte entstehenden Formeln mit Vortheil zu verwenden, wenn es sich darum handelt, die Relationen zu ermitteln, die zwischen den 2^{2p} hierhergehörigen mit demselben Argumentensysteme (v) versehenen ϑ-Functionen bestehen.

Ersetzt man, im Anschlusse an das früher Bemerkte, in der Formel (III) des Art. 7 die Grössen x, x' durch die unter (Θ_0) angegebenen, in ihren Modulen $a_{\mu\mu'}$ keinen Beschränkungen unterworfenen ϑ-Producte, so erhält man, von Nebensächlichem abgesehen, das zuerst von den Herren *Nöther**) und *Frobenius***) aufgestellte Additionstheorem der allgemeinen ϑ-Functionen. Die Formel (U) des Art. 8 dagegen, die dadurch ausgezeichnet ist, dass sie keine Grössen x' enthält, liefert, wenn man die Grössen x durch die unter (Θ_0) angegebenen ϑ-Producte ersetzt, die Fundamentalformel für die Gewinnung der sämmtlichen hierhergehörigen ϑ-Relationen. Das wahre Wesen der Formeln (III) und (U) ist darin zu suchen, dass das ihnen zu Grunde liegende System der $2p+2$ Charakteristiken $[A_1']$, $[A_2']$, $\ldots$, $[A_{2p+2}']$ ein von speciellen Voraussetzungen entkleidetes ist, und dass in Folge dessen aus jeder dieser beiden Formeln die sämmtlichen zu derselben Kategorie gehörigen hervorgehen, wenn man an Stelle des Systems $[A_1']$, $[A_2']$, $\ldots$, $[A_{2p+2}']$ die verschiedenen derartigen Systeme einführt. Bezeichnet man mit μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 irgend vier verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, 2p+2$ und ersetzt dann in dem Systeme $[A_1']$, $[A_2']$, $\ldots$, $[A_{2p+2}']$ die Charakteristiken $[A_{\mu_1}']$, $[A_{\mu_2}']$, $[A_{\mu_3}']$, $[A_{\mu_4}']$, durch die Charakteristiken $[SA_{\mu_1}']$, $[SA_{\mu_2}']$, $[SA_{\mu_3}']$, $[SA_{\mu_4}']$ beziehlich, indem man unter $[S]$ die Summe der vier Charakteristiken $[A_{\mu_1}']$, $[A_{\mu_2}']$, $[A_{\mu_3}']$, $[A_{\mu_4}']$ versteht, so ist das neue System, wie sich leicht aus dem in Art. 7 unter 1) Bemerkten ergiebt, von derselben Beschaffenheit, wie das ursprüngliche, und es besteht zudem zwischen den Summen $[\varkappa]$ und $[\varkappa']$ der im ursprünglichen und der im neuen Systeme beziehlich vorkommenden ungeraden (oder geraden) Charakteristiken die zuerst von Herrn *Frobenius* angegebene Relation $[\varkappa'] = [\varkappa] + [S]$. Berücksichtigt man dann noch, dass man, wie Herr *Frobenius* in der soeben citirten Arbeit gezeigt hat, auf diese Weise zu jedem derartigen Systeme gelangen kann, so erkennt man, dass man aus jeder der beiden auf ein beliebiges System $[A_1']$, $[A_2']$, $\ldots$, $[A_{2p+2}']$ bezogenen Formeln (III) und (U) alle übrigen ableiten kann, ohne dass es nöthig wäre, zu speciellen Charakteristiken hinabzusteigen.

Handelt es sich schliesslich darum, die Formeln (III) und (U) zur Gewinnung der Relationen, welche zwischen den 2^{2p} mit demselben Argumentensysteme (v) versehenen ϑ-Functionen bestehen, zu verwerthen, so möchte ich, wenn auch diese Relationen sämmtlich aus der Formel (III) erhalten werden können, doch der Formel (U) wegen ihrer einheitlichen Gestalt den Vorzug vor der ersteren geben. Bei ihrer Anwendung reducirt sich nämlich die Frage nach den verschiedenen ϑ-Rela-

*) *Nöther*, Zur Theorie der Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten. Math. Annalen, Bd. XVI, pag. 327, Formel (V).

**) *Frobenius*, Ueber das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variabeln. Crelle's Journal, Bd. 89, pag. 219, Formel (10.).

tionen auf die Untersuchung der verschiedenen Systeme von je $6 \cdot 2^{p-2}$ Charakteristiken, die aus dem Fundamentalsysteme der $6 \cdot 2^{p-2}$ ungeraden Charakteristiken von der Form $[k\alpha_\mu l_\varrho]$, $\mu = 0, 1, \ldots, 5$, $\varrho = 1, 2, \ldots, 2^{p-2}$ hervorgehen, wenn man die sämmtlichen Charakteristiken desselben um ein und dieselbe willkürliche Charakteristik $[\omega]$ vermehrt und dann für $[\omega]$ der Reihe nach die 2^{2p} überhaupt existirenden Charakteristiken setzt. Diese verschiedenen Systeme von je $6 \cdot 2^{p-2}$ Charakteristiken spielen im allgemeinen Falle dieselbe Rolle, wie die *Rosenhain*'schen Sechsersysteme im Falle $p = 2$, und man gewinnt unter ihrer Anwendung einen klareren Einblick in die Entstehung und in die Structurverhältnisse der verschiedenen ϑ-Relationen, als wenn man von der Formel (III) ausgeht. Die vollständige Durchführung dieses Gedankens, welche die noch ausstehende Behandlung einer Reihe combinatorischer Probleme verlangt, würde über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinausgehen, und ich kann an dieser Stelle um so eher auf weitere Ausführungen verzichten, als eine Reihe hierhergehöriger ϑ-Relationen schon in der Arbeit des Herrn *Nöther* aufgestellt und untersucht worden ist, und speciell der Fall $p = 2$ von Herrn *Krazer* in seiner schon erwähnten Arbeit nach den von mir hier entwickelten Principien durchgeführt wurde. Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit war es, auf die gemeinsame Quelle hinzuweisen, aus der alle ϑ-Relationen fliessen, und die Mathematiker zur weiteren Verfolgung des hier von mir gezeigten Weges zu veranlassen.

Berichtigungen.

Seite 12, Z. 1 v. o. lese man: „$\vartheta((u - v - w + t))$“ statt „$((u - v - w + t))$“

„ 41, Z. 12 v. o. ist vor $u_\nu^{(\mu)}$ eine Klammer ausgefallen

„ 46, Z. 1 v. u. lese man: „$e^{\frac{2\pi i}{r}}$“ statt „$e^{-\frac{2\pi i}{r}}$“

„ 59, Z. 5 des Textes v. u. lese man: „zwischen den $2p + 1$“ statt „zwischen diesen $2p + 1$“

„ 69, Z. 6 v. u. lese man: „α_{2p+2}“ statt „$\alpha 2_{p+2}$“

„ 87, Z. 7 v. o. lese man: „$[\xi]$“ statt „ξ“

„ 95, Z. 4 v. u. lese man: „in der vorliegenden Reihenfolge“ statt „in irgend welcher Reihenfolge“.





